# Charakterisierende Eigenschaften regulärer Operatoren

Diplomarbeit
Universität Osnabrück
Diplomstudiengang Mathematik

Kai Gersmann

Betreuer:Prof.Dr.P.Meyer-Nieberg

19. 12. 2000

# Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wann lineare Operatoren zwischen Vektorverbänden *regulär* sind, d.h. Differenz zweier positiver Operatoren. Einem regulären Operator sieht man seine Regularität nicht immer gleich an, ein direkter Nachweis ist oft nicht ganz einfach. Was man gerne hätte, wären notwendige und hinreichende Bedingungen für Regularität, die einfacher nachzuprüfen sind. In dieser Arbeit möchte ich solche Bedingungen zusammenstellen.

Als zentral in diesem Zusammenhang erweisen sich die *Ordnungsbeschränktheit* sowie die *Stetigkeit* linearer Operatoren.
Mit ordnungsbeschränkten Operatoren beschäftigt sich der klassische *Satz von Riesz-Kantorovich*:

*Seien $E, F$ Vektorverbände, $F$ sei Dedekindvollständig.*
*Dann sind alle ordnungsbeschränkten Operatoren von $E$ nach $F$ regulär und bilden einen Dedekindvollständigen Vektorverband.*
*Für einen solchen Operator $T$ und $x \geq 0$ gelten die Formeln*

$$T^+x = \sup T[0,x],$$

$$T^-x = \sup T[-x,0],$$

$$|T|x = \sup T[-x,x].$$

Diesen Satz findet man in allen Büchern über Vektorverbände.Ich werde einen Beweis und einige unmittelbare Folgerungen in einem kurzen Abschnitt präsentieren. (Überdies ist sehr leicht zu sehen, dass reguläre Operatoren immer ordnungsbeschränkt sind.)

Ausgehend von diesem klassischen Ergebnis erhält man eine Reihe weitere Regularitätsbedingungen.
Sind die betrachteten Räume *Banachverbände*, so sind alle regulären Operatoren stetig (in allgemeinen normierten Vektorverbänden gibt es einfache Gegenbeispiele).In vielen Fällen ist die Stetigkeit eines Operators aber auch hinreichend für die Regularität. Das erste Kapitel behandelt diese Situation. In Abschnitt 1.1 werden zunächst hinreichende Bedingungen zusammengestellt, unter denen alle stetigen Operatoren regulär sind, sowie auch notwendige Bedingungen hierfür. In vielen Fällen muss der Urbildraum ein L-Raum

oder der Bildraum ein M-Raum sein; es wird aber auch ein Gegenbeispiel präsentiert. Zudem wird die r-Norm auf dem Raum der regulären Operatoren vorgestellt und die Frage behandelt, wann sie mit der gewöhnlichen Operatornorm übereinstimmt.
In 1.2 wird der Urbildraum als L-Raum vorausgesetzt. Es werden Umkehrungen von Sätzen aus 1.1 gezeigt, insbesondere wird die monotone Vollständigkeit des Bildraums, die hinreichend für die Regularität aller stetigen Operatoren von L-Räumen in diesen Raum ist, sich auch als notwendig hierfür erweisen. Abschnitt 1.3 behandelt schließlich M-Räume als Bildräume. Hier werden zunächst eine Reihe Gegenbeispiele präsentiert, u.a. auch gezeigt, dass eine Umkehrung entsprechend der Situation in 1.2 nicht gilt. Ausführlich wird der Fall diskutiert, in denen der Bildraum eine Ordnungseins besitzt. Es werden einige Urbildräume vorgestellt, in denen alle stetigen Operatoren in einen M-Raum mit Ordnungseins regulär sind. Ist der Urbildraum ebenfalls ein M-Raum mit Ordnungseins, so lassen sich diese Räume nahezu vollständig klassifizieren.
Kapitel 1 ist am umfangreichsten, da es gerade zur Fragestellung dieses Kapitels in den letzten Jahren viele Veröffentlichungen gegeben hat.
Kapitel 2 befasst sich mit dem Zusammenhang zwischen Ordnungsbeschränktheit und Regularität, wenn die betrachteten Räume *nicht* die Voraussetzungen des Satzes von Riesz-Kantorovich erfüllen. In Abschnitt 2.1 werden allgemeine Vektorverbände, in 2.2 Banachverbände betrachtet. Anhand von Beispielen wird aufgezeigt, welche Situationen auftreten können.
Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit der Frage, ob stetige oder ordnungsbeschränkte Operatoren durch reguläre Operatoren approximiert werden können. Wieder gibt es Beispiele für die verschiedenen möglichen Situationen.
Das dritte Kapitel widmet sich der Frage, wann die *zweite* Aussage des Satzes von Riesz-Kantorovich gilt, also die regulären Operatoren einen Verband bilden. Es wird neben einigen Beispielen und Gegenbeispielen insbesondere ein Satz von Abramovich und Gejler präsentiert, nach dem nur in Dedekindvollständigen Bildräumen die regulären Operatoren *immer* einen Verband bilden. Das gleiche Ergebnis gibt es auch für Banachverbände.
Im letzten Kapitel werden schließlich übrige Eigenschaften von Operatoren vorgestellt, aus denen Regularität folgen kann. Diese sind allerdings speziell und nicht mehr notwendig für Regularität.
4.1 beschäftigt sich mit kompakten Operatoren. Nach einem Satz von Krengel sind kompakte Operatoren in einen M-Raum stets regulär und besitzen einen kompakten Betrag. In anderen Bildräumen gibt es aber Gegenbeispiele.

Der nächste Abschnitt behandelt disjunkterhaltende Operatoren, die unter nur geringen Zusatzvoraussetzungen stets regulär sind. In 4.3 schließlich geht es um kegelabsolutsummierende und majorisierende Operatoren. Diese Operatoren sind regulär unter den gleichen Bedingungen wie Operatoren von einem L-Raum bzw. in einen M-Raum.

Ich habe in dieser Arbeit versucht, nur solche Ergebnisse zu präsentieren, die mit elementaren Methoden auskommen. Benötigt ein Satz tiefliegende Beweismethoden, habe ich ihn in der Regel nicht aufgenommen, sondern mich mit einem Literaturhinweis beschieden. So benutzt diese Arbeit neben weitgehend elementaren Methoden der Theorie der Vektorverbände und allgemeiner Funktionalanalysis nur noch ein wenig Maß-und Integrationstheorie; und natürlich konnte ich nicht im Zusammenhang mit dem Darstellungssatz von Kakutani für M-Räume ohne etwas allgemeine Topologie auskommen. Diese Kakutani-Darstellungen werden hier jedoch nur für theoretische Überlegungen benutzt, auf konkrete komplizierte Darstellungen wie die Stone-Czech-Kompaktifizierung konnte ich verzichten.
Trotzdem konnte ich die meisten Veröffentlichungen der letzten Jahre bezüglich Regularitätsbedingungen, vor allem von Yu.Abramovich und A.Wickstead, in dieser Arbeit berücksichtigen. In vielen Fällen habe ich diese Ergebnisse noch durch zum Teil eigene (Gegen-)Beispiele ergänzt. An einigen Stellen werden auch Probleme aufgeführt , die zur Zeit noch ungelöst sind. Hier sind in den nächsten Jahren sicher noch neue Ergebnisse zu erwarten.

Osnabrück,19. 12. 2000 Kai Gersmann

**Literatur**
Für Allgemeines über Vektorverbände und Banachverbände siehe das Buch von Meyer-Nieberg[1].Hier findet man auch Beweise von Sätzen, die hier nicht gezeigt werden (können).
Alle hier benutzten Sätze der allgemeinen Topologie findet man (z.B.) bei Jänich[19]. Für maßtheoretische Details siehe z.B. Bauer[17].
Weitere Literaturangaben gibt es jeweils an den entsprechenden Stellen in der Arbeit.

**Bezeichnungen** Die Standard-Bezeichnungen entsprechen denen in [1].
Nachstehend einige weitere Bezeichnungen, die häufig verwendet werden und daher an dieser Stelle erklärt werden:
Ist $I$ eine Indexmenge, so sei $c(I)$ der Raum der konvergenten Familien über $I$,

$$c(I) = \{(x_i)_{i \in I} : \ \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ so dass } \{i \in I : |x_i - a| \geq \varepsilon\} \text{ endlich } \ \forall\, \varepsilon > 0\}.$$

Analog sind $\ell^p(I), c_0(I)$ etc. definiert. Mit einer naheliegenden Norm und Ordnung sind diese Räume Banachverbände.
Nicht zu verwechseln mit $c(I)$ ist der Raum $c[E]$ der konvergenten Folgen von Elementen in einem Banachverband $E$. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird dieser Raum und auch die analog definierten Räume $\ell^p[E]$ und $c_0[E]$ abweichend von der Standardnotation mit eckigen Klammern notiert.Normiert werden diese Räume durch

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

für $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p[E]$; für $c[E]$ und $c_0[E]$ entsprechend mit Supremum,etc.
Ist $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Banachverbänden, so lassen sich auf naheliegende Weise die Räume $c_0[E_n]_{n=1}^{\infty}$ und $\ell^p[E_n]_{n=1}^{\infty}$ definieren und normieren. Alle diese Räume sind dann Banachverbände mit der punktweisen Ordnung.

In einem Raum von Funktionen(Folgen,Familien) wird die konstante Funktion(Folge,Familie) 1 mit $\mathbf{1}$ und die charakteristische Funktion(Folge,Familie) der Menge $A$ mit $\mathbf{1}_A$ bezeichnet.
In einem Raum von Folgen oder Familien bezeichnet $e_i$ die Folge(Familie), deren $i$-te Komponente 1 und alle anderen Komponenten 0 sind.

# 0 Der Satz von Riesz-Kantorovich

In diesem Abschnitt wird der Beweis des Satzes von Riesz-Kantorovich sowie einige Konsequenzen desselben vorgestellt.
Seien $E, F$ Vektorverbände.

**0.1** *Beweis des Satzes von Riesz-Kantorovich:*
Sei $F$ Dedekindvollständig,$T \in L^b(E, F)$. Für $x \in E_+$ definiere

$$Sx = \sup T[0, x].$$

Beachte, dass das Supremum existiert, da $T$ ordnungsbeschränkt und $F$ Dedekindvollständig ist. Wegen der Rieszschen Zerlegungseigenschaft von $E$ ist $[0, x + z] = [0, x] + [0, z]$ für $z \in E_+$, es folgt
$S(x + z) = S(x) + S(z)$; außerdem $S(\alpha x) = \alpha S(x)$ für $\alpha \geq 0$.
Setzt man nun noch $Sx = Sx^+ - Sx^-$ für beliebiges $x \in E$, so erhält man einen linearen Operator.
Aus der Definition folgt sofort $S \geq T, 0$.
Ist umgekehrt $U$ eine obere Schranke von $T$ und 0, so folgt für $0 \leq y \leq x$
$Ux \geq Uy \geq Ty$, also $Ux \geq Sx$.
Es folgt $S = T^+$.
Mit $T^- = (-T)^+$ und $|T| = T^+ + T^-$ erhält man

$$T^- x = \sup -T[0, x] = \sup T[-x, 0]$$

und

$$|T|x = \sup T[-x, 0] + \sup T[0, x] = \sup T[-x, x]$$

nach der Rieszschen Zerlegungseigenschaft. Es ist nun insbesondere $T$ regulär, und es existiert zu $S, T \in L^b(E, F)$ stets $(S - T)^+ + T = S \vee T$. Also ist $L^b(E, F) = L^r(E, F)$ ein Vektorverband.
Zeige nun noch die Dedekindvollständigkeit von $L^r(E, F)$:
Zu einer ordnungsbeschränkten Teilmenge $A \subset L^b(E, F)$ sei

$$A_0 = \{T_1 \vee \cdots \vee T_n : n \in \mathbb{N}, T_i \in A\}.$$

$A_0$ ist ebenfalls ordnungsbeschränkt, und jede obere Schranke von $A_0$ ist auch obere Schranke von $A$ (und umgekehrt).
Für $x \geq 0$ setze

$$Sx = \sup_{T \in A_0} Tx.$$

Dann ist $S(\alpha x) = \alpha S(x)$ für $\alpha \geq 0$, $S(x+y) \leq Sx + Sy$, aber auch

$$Sx + Sy = \sup_{T_1 \in A_0} T_1 x + \sup_{T_2 \in A_0} T_2 x \leq \sup_{T_1, T_2 \in A_0} (T_1 \vee T_2)(x+y) \leq S(x+y),$$

also lässt sich $S$ wie oben zu einem linearen Operator von $E$ nach $F$ fortsetzen.Wegen $S \geq T$ für einen regulären Operator $T$ ist $S = T + (S - T)$ Summe eines positiven und eines regulären Operators, also regulär.
Nun ist $S$ eine obere Schranke von $A$, und für jede obere Schranke $U$ von $A$ folgt für $x \geq 0, n \in \mathbb{N}$

$$Ux \geq T_1 x \vee \cdots \vee T_n x \quad \text{für} \quad T_i \in A,$$

also $Ux \geq Sx$. Es folgt $S = \sup(A)$. ○

Aus 0.1 sieht man auch, dass ein linearer Operator $T : E \to F$ regulär ist und einen Betrag besitzt, wenn für $x \in E^+$ stets $\sup T[0,x]$ existiert.

**0.2 Satz** *Sei $E$ normiert und separabel, $F$ sei $\sigma$-Dedekindvollständig. Dann ist $L^b(E,F)$ ein $\sigma-$Dedekindvollständiger Vektorverband, und es gelten die gleichen Formeln wie oben.*

*Beweis:* Sei $T \in L^b(E,F)$. Zu $x \in E_+$, $x \neq 0$ sei $y \in F_+$
mit $T[-x,x] \subset [-y,y]$.
Sei für $z \in F_y \quad \|z\| = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda z \in [-y,y]\}$.
$\|.\|$ ist wirklich eine Norm auf $F_y$, und $T_{|E_x}$ ist bezüglich dieser Norm stetig mit $\|T\| \leq \|x\|^{-1}$.
Ist $A_x$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $[0,x]$, so liegt $T(A_x)$ dicht in $T[0,x]$. Da $F$ $\sigma-$Dedekindvollständig, existiert $z := \sup T(A_x)$.
Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $z + \varepsilon y$ obere Schranke von $T[0,x]$, es folgt $z = \sup T[0,x]$. Es existieren somit $|T|, T^-, T^+$ nach den Formeln wie oben. Ist nun noch in 0.1 $A$ abzählbar, so ist auch die zugehörige Menge $A_0$ abzählbar, und es existiert $\sup A_0 = \sup A$ wie oben. ○

Abschließend einige nützliche Rechenregeln für Operatoren auf *endlichdimensionalen* Vektorverbänden.

**0.3 Satz** (i) *Ist $E$ oder $F$ endlichdimensional, so ist $L(E,F) = L^r(E,F)$*
(ii) *Besitzt $E$ eine disjunkte, positive Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, so gilt für $T \in$*

*$L(E,F)$ und $x \in E_+$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$*

$$|T|x = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n T(\sigma_j \alpha_j e_j) : \sigma_j \in \{-1,1\} \right\}.$$

(iii) *Sei $F$ Dedekindvollständig,$T \in L^b(E,F)$ und $y \in F$ mit $T[-x,x] \subset [-y,y]$.*
*Ist $F_y$ endlichdimensional mit einer disjunkten Basis $\{y_1, \dots, y_n\} \subset F_y^+$, so ist*

$$|T|x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad mit \quad \alpha_i = \sup \left\{ \lambda_i \in \mathbb{R} : Ty = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k, y \in [-x,x] \right\}.$$

*für alle $1 \leq i \leq n$.*

*Beweis:* (i) Ist $F$ endlichdimensional, so ist $F$ auch Dedekindvollständig, und alle linearen Operatoren nach $F$ sind ordnungsbeschränkt und damit regulär. Ist $E$ endlichdimensional, so ist für $T \in L(E,F)$ $R(T)$ endlichdimensional, es folgt die Behauptung.
(ii) Für $1 \leq j \leq n$ ist $[-e_j, e_j] = \{\alpha e_j : \alpha \in [-1,1]\}$. Mit der Riesz-Kantorovich-Formel folgt sofort $|T|e_j = |Te_j|$. Für $x \geq 0$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ ergibt sich

$$|T|x = \sum_{j=1}^n \alpha_j |Te_j| = \sum_{j=1}^n T(\alpha_j e_j) \vee T(-\alpha_j e_j)$$

$$= \sup \left\{ \sum_{j=1}^n T(\sigma_j \alpha_j e_j) : \sigma_j \in \{-1,1\} \right\}.$$

(iii) folgt sofort aus der Riesz-Kantorovich-Formel.

○

# 1 Stetige und reguläre Operatoren

## 1.1 Stetigkeit und Regularität auf verschiedenen Banachverbänden. Die r-Norm

Dieser Abschnitt behandelt den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Regularität aller Operatoren zwischen verschiedenen Banachverbänden. Es werden klassische Sätze gezeigt bezüglich Regularität von Operatoren von einem L-Raum oder in einen M-Raum. Auch wird die Frage behandelt, inwieweit auf anderen Räumen alle stetigen Operatoren regulär sein können.
Die meisten Ergebnisse findet man im Buch von Meyer-Nieberg[1].
Seien $E, F$ Banachverbände.
Zunächst wird eine natürliche Norm auf $\mathcal{L}^r(E, F)$ vorgestellt:

**1.1.1 Definition und Satz** *Für einen Operator $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ sei*

$$\|T\|_r = \inf\{\|S\| : S \in \mathcal{L}^+(E, F), S \geq \pm T\}$$

*$\|.\|_r$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}^r(E, F)$, und $\mathcal{L}^r(E, F)$ ist mit dieser Norm ein Banachraum.*
*Beweis:* Die Normeigenschaften sind klar.Beachte auch,dass $\|T\|_r$ genau dann existiert,wenn $T$ regulär ist,und dass $\|T\|_r \geq \|T\|$.
Sei $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^r(E, F)$ bezüglich $\|.\|_r$. Da $\|.\|_r \geq \|.\|$, existiert ein Limes $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Zeige,dass $T$ regulär ist.
Wähle eine Teilfolge $(T_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(T_n)$ mit $\|T_{n_k} - T_m\|_r \leq k^{-2}$ für alle $m \geq n_k$.
Dann existieren zu $k \in \mathbb{N}$ $S_k \in \mathcal{L}^+(E, F)$
mit $S_1 \geq \pm T_{n_1}, S_k \geq \pm(T_{n_k} - T_{n_{k-1}})$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\| < \infty$.
Es existiert also $S := \sum_{k=1}^{\infty} S_k$,und es ist $S \geq \sum_{k=1}^{m} S_k \geq \pm T_{m_k}$ und damit $S \geq \pm T$,also $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$. ◯

Mit dieser r-Norm zerfällt das Problem "$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ ?" in zwei Fragen.Die zweite Frage ist, wann die beiden Räume auch isometrisch isomorph sind, d.h. auch noch $\|.\| = \|.\|_r$ gilt.
In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{L}(E, F) \equiv \mathcal{L}^r(E, F)$.
Die nächsten Sätze liefern klassische Ergebnisse für beide Fälle.
Vorab einige Definitionen:

**1.1.2 Definition** (i) *Ein Banachverband $E$ heisst* monoton vollständig,*wenn jede normbeschränkte und aufwärts gerichtete Teilmenge $A \subset E$ ein Supre-*

*mum besitzt.*
(ii) *Ein Banachverband $E$ heisst* monoton folgenvollständig, *wenn jede normbeschränkte aufsteigende Folge in $E$ ein Supremum besitzt.*
(iii) *Ein Banachverband $E$ besitze* Eigenschaft (P),*wenn eine positive Projektion $P : E'' \to E$ mit $\|P\| = 1$ existiert.* ○

*Bemerkung:* Beide Eigenschaften (i) und (iii) implizieren Dedekindvollständigkeit: Ist $E$ monoton vollständig und $A \in E$ ordnungsbeschränkt, so ist $D = \{x_1 \vee \cdots \vee x_n : n \in \mathbb{N}, x_i \in A\}$ aufwärts gerichtet und ordnungsbeschränkt,also erst recht normbeschränkt.Also exitsiert $\sup D$,und es muss $\sup D = \sup A$ sein.Ebenso folgt aus (ii) die $\sigma$-Dedekindvollständigkeit.
Besitzt $E$ Eigenschaft (P),so hat eine ordnungsbeschränkte Menge $A \subset E$ ein Supremum $x \in E''$.Ist $P$ die positive Projektion auf $E$, folgt $Px = \sup A$.
Mehr zur monotonen Vollständigkeit folgt in Abschnitt 1.2. Dort wird auch gezeigt, dass jeder Raum mit Eigenschaft (P) monoton vollständig ist.

**1.1.3 Satz** (i) *Ist $F$ ein Dedekindvollständiger M-Raum mit Ordnungseins (und zugehöriger Norm), so ist $\mathcal{L}(E, F) \equiv \mathcal{L}^r(E, F)$.*
(ii) *Ist $E$ ein L-Raum und besitzt $F$ Eigenschaft (P), so ist*
*$\mathcal{L}(E, F) \equiv \mathcal{L}^r(E, F)$.*

*Beweis:* (i) Sei $e$ Ordnungseins von $F$, $x \in E_+$. Dann ist $T[-x, x] \subset \|T\|\,\|x\|[-e, e]$.
Nach 0.1 existiert $|T|$,und es ist $|T|x = \sup T[-x, x] \subset \|T\|\,\|x\|[-e, e]$. Es folgt $\|T\|_r = \|T\|$.
(ii) Betrachte $T' : F' \to E'$. $E'$ ist ein Dedekindvollständiger M-Raum mit Ordnungseins. Wegen (i) ist $T'$ regulär,und $\|T'\|_r = \|T'\|$. Dann ist auch $T''$ regulär,und es existiert $|T''|$.
Sei $J : E \to E''$ die kanonische Einbettung und $P : E'' \to E$ eine positive Projektion mit Norm 1.
Dann ist $T = PT''J$.Da $P$ und $J$ positiv, folgt $P|T''|J \geq \pm PT''J = \pm T$.
Es ist also $T$ ordnungsbeschränkt, nach 0.1 existiert $|T|$. Da $P$ und $J$ positiv mit Norm 1,ist $\|P\|_r = \|J\|_r = 1$, es folgt $\|\,|T|\,\| = \|T\|_r \leq \|T''\|_r$.
Weiter gilt $|T|'' \geq \pm T''$,also $|T|'' \geq |T''| \Rightarrow \|T''\|_r \leq \|\,|T|''\,\| = \|\,|T|\,\| = \|T\|_r$.
Aus (i) folgt $\|\,|T|\,\| = \|\,|T|'\,\| = \|T'\|_r = \|T'\| = \|T''\|$;
insgesamt ergibt sich $\|T\| = \|T\|_r$. ○

1.1.3(i) zeigt insbesondere, dass $E'$ stets ein Dedekindvollständiger Banachverband ist.

Der nächste Satz stammt aus Abramovich und Wickstead[5]:

**1.1.4 Satz** (i) *Ist $F$ monoton vollständig und $E$ ein L-Raum,so ist* $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$,*und* $|T|$ *existiert für alle* $T \in \mathcal{L}(E,F)$.
(ii) *Ist $F$ monoton folgenvollständig und $E$ ein separabler L-Raum,so ist* $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, *und* $|T|$ *existiert für alle* $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

*Beweis:* In beiden Fällen ist nur zu zeigen,dass alle stetigen Operatoren ordnungsbeschränkt sind. Die Aussagen folgen dann aus 0.1 bzw. 0.2.
Ferner benötigt man noch ein elementares Lemma:

**1.1.5 Lemma** *Seien* $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m \in E_+$ *mit*
$x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m$.
*Dann gibt es zu* $1 \le i \le n, 1 \le j \le m \quad z_{i,j} \in E_+$,*so dass*
$x_i = \sum_{j=1}^m z_{i,j}$;
$y_j = \sum_{i=1}^n z_{i,j}$ *für alle* $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

*Beweis:* durch Induktion nach $m$.
$m = 1$: Wähle einfach $z_{i,1} = x_i$.
$m \to m+1$ : Sei $x_1 + \cdots + x_n = y_0 + \cdots + y_m$ mit $x_i, y_j \in E_+$.
Wegen der Rieszschen Zerlegungseigenschaft existieren $z_{1,0},\dots,z_{n,0} \in E_+$ mit $z_{i,0} \le x_i$ und $\sum_{i=1}^n z_{i,0} = y_0$.
Sei $v_i = x_i - z_{i,0}$. Dann ist $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{j=1}^m y_j$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren für $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ $z_{i,j} \ge 0$ mit $v_i = \sum_{j=1}^m z_{i,j}$ und $y_j = \sum_{i=1}^n z_{i,j}$.
Wegen $x_i = v_i + z_{i,0}$ und $y_0 = \sum_{i=1}^n z_{i,0}$ folgt die Behauptung. ○

*Beweis von 1.1.4:*
(i) Sei $T \in \mathcal{L}(E,F), x \ge 0$.
Setze $A(x) = \{|Tx_1| + \cdots + |Tx_n| : n \in \mathbb{N}, x_i \in E_+, \sum_{k=1}^n x_i = x\}$
Da $E$ ein L-Raum ist, liegt $A(x)$ in $\|T\|\mathrm{ball}(F)$,ist also normbeschränkt.Aus 1.1.5 und der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $A(x)$ auch aufwärts gerichtet ist. Somit existiert $y = \sup A(x)$. Es folgt $T[0,x] \subset [0,y]$. Damit ist $T$ ordnungsbeschränkt,was zu zeigen war.
(ii) Sei zu $x \ge 0$ $E(x)$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $[0,x]$.

Setze

$$D(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} |Tz_k| : n \in \mathbb{N}, z_k \in E(x) \right\}.$$

$D(x)$ ist ebenfalls abzählbar. Zeige:$\bar{D}(x) \supset A(x)$ ($A(x)$ wie in (i)).
Für $\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| \in A(x)$ und $\varepsilon > 0$ wähle $z_1, \ldots, z_n \in E(x)$ mit $\|z_k - x_k\| < \varepsilon/(n\|T\|)$. Es folgt

$$\| |Tx_k| - |Tz_k| \| \leq \|Tz_k - Tx_k\| \leq \|T\| \|z_k - x_k\| < \varepsilon/n,$$

also $\|\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| - \sum_{k=1}^{n} |Tz_k| \| < \varepsilon$ ,
wegen $\sum_{k=1}^{n} |Tz_k| \in D(x)$ folgt $\bar{D}(x) \supset A(x)$.
Zu $n \in \mathbb{N}, z \in D(x)$ wähle $z^{(n)} \in A(x)$ mit $\|z - z^{(n)}\| < 1/2n$. Falls so ein $z^{(n)} \in A(x)$ nicht existiert, wähle $z^{(n)} \in A(x)$ beliebig.
Sei

$$C(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z^{(n)} : z \in D(x)\}.$$

Dann ist $C(x)$ abzählbare Teilmenge von $A(x)$, und zu $n \in \mathbb{N}, y \in A(x)$ existiert $z \in D(x)$ mit $\|y - z\| < 1/2n$. Nach Konstruktion von $z^{(n)}$ ist $\|y - z^{(n)}\| < 1/n$. $C(x)$ liegt also dicht in $A(x)$.
Setze schließlich

$$B(x) = \{y_1 \vee \cdots \vee y_n : n \in \mathbb{N}, y_i \in C(x)\}.$$

Dann ist $B(x)$ immer noch abzählbar,aufwärts gerichtet,und da $A(x)$ aufwärts gerichtet ist, existiert zu $u \in B(x)$ ein $v \in A(x)$ mit $v \geq u$. $B(x)$ ist somit auch normbeschränkt. Somit existiert $y = \sup B(x)$. Analog zu 0.2 muss dann auch $y = \sup A(x)$ sein.
Mit (i) folgt die Behauptung. ○

Die nächsten Sätze beschäftigen sich mit der Frage nach der Umkehrung von 1.1.3 und 1.1.4 bezüglich der L-oder M-Räume.
Im isometrischen Fall hat man eine Umkehrung, die in [10] bewiesen wurde:

**1.1.6 Satz (Cartwright-Lotz)** *Ist $\|T\|_r = \|T\|$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$, so ist $E$ ein L-Raum oder $F$ ein M-Raum.*
Der Beweis benötigt zunächst zwei Lemmata:

**1.1.7 Lemma** *Seien $x_1', \dots, x_n' \in E_+'$ disjunkt und $x_1, \dots, x_n \in E_+$ mit $\langle x_i', x_i \rangle \geq C$ für ein $C > 0$ und alle $1 \leq i \leq n$.*
*Dann existieren zu jedem $\varepsilon > 0$* disjunkte *$z_1, \dots, z_n \in E_+$ mit $z_i \leq x_i$, $\langle x_i', z_i \rangle \geq C - \varepsilon$ für alle $i$ , $\langle x_k', z_i \rangle \leq \varepsilon$ für alle $i \neq k$.*

*Beweis:* Sei $\varepsilon > 0$.
Mit der Riesz-Kantorovich-Formel erhält man für $i \neq k, x \geq 0$

$$0 = \langle x_i' \wedge x_k', x \rangle = \langle x_i' - (x_k' - x_i')^-, x \rangle$$

$$= \langle x_i', x \rangle + \inf_{0 \leq y \leq x} \langle x_k' - x_i', y \rangle = \inf_{0 \leq y \leq x} (\langle x_i', x - y \rangle + \langle x_k', y \rangle)$$

Es existiert zu $x_i$ somit $y_i \geq 0$, so dass für alle $k \neq i$
$\langle x_k', y_i \rangle \leq \varepsilon/2n$ und $\langle x_i', x_i - y_i \rangle \leq \varepsilon/2$ ,also $\langle x_i', y_i \rangle \geq C - \varepsilon/2$.
Setze nun

$$z_i = (2y_i - (y_1 + \cdots + y_n))^+.$$

Diese $z_i$ sind paarweise disjunkt
(Für $i \neq k$ ist $z_i \wedge z_k \leq (y_i - y_k)^+ \wedge (y_k - y_i)^+ = 0$) und es ist $0 \leq z_i \leq y_i \leq x_i$.
Weiter ist

$$\langle x_i', z_i \rangle \geq \langle x_i', 2y_i - (y_1 + \cdots + y_n) \rangle = \langle x_i', y_i \rangle - \sum_{k \neq i} \langle x_i', y_k \rangle \geq C - \varepsilon.$$

○

**1.1.8 Lemma** (i)*Ist für alle positiven disjunkten $x_1, x_2 \in E$ $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, so ist $E$ ein L-Raum.*
(ii) *Ist für alle positiven disjunkten $x_1, x_2 \in E$ $\|x_1 \vee x_2\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$, so ist $E$ ein M-Raum.*

*Beweis:* (i) Seien $x_1, x_2 \geq 0$ . $E''$ erfüllt die Voraussetzungen von Freudenthals Spektralsatz. Wähle zu $\varepsilon > 0$ $v_1, \dots, v_n \in E''$ mit

$$0 \leq v_i \leq x_1 + x_2 \ , \ v_i \perp x_1 + x_2 - v_i \ , \ \left\| x_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\| < \varepsilon/2.$$

Es folgt

$$\|x_1 + x_2\| = \|\alpha_1 v_1 + \alpha_1(x_1 + x_2 - v_1)\| + (1 - \alpha_1)\|v_1 + v_2\|$$

$$= \|\alpha_1 v_1\| + \|\alpha_1(x_1 + x_2 - v_1)\| + (1-\alpha_1)\|v_1 + v_2\|$$

$$\geq \|\alpha_1 v_1\| + \|x_1 + x_2 - \alpha_1 v_1\|$$

$$\geq \cdots \geq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i v_i\| + \left\| x_1 + x_2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\| \geq \|x_1\| + \|x_2\| - \varepsilon$$

Da $\varepsilon$ beliebig war,folgt $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.
(ii) Zeige,dass $E'$ ein L-Raum ist.
Seien $x'_1, x'_2 \in E'_+$ disjunkt mit Norm 1. Wähle zu $\varepsilon > 0$ $x_1, x_2 \in E_+$ mit Norm 1 und $\langle x'_i, x_i\rangle > 1 - \varepsilon/2$. Nach 1.1.7 kann man die $x_i$ disjunkt wählen.
Es folgt $\langle x'_1 + x'_2, x_1 + x_2\rangle \geq \langle x'_1, x_1\rangle + \langle x'_2, x_2\rangle > 2 - \varepsilon$.
Da $\varepsilon$ beliebig war, folgt $\|x'_1 + x'_2\| = 2$.
Für beliebige disjunkte $x, y$ betrachte $x, \alpha y$ mit $\|x\| = \alpha\|y\|, \alpha \geq 1$ und erhalte $\|x + y\| \geq \|x + \alpha y\| - (\alpha - 1)\|y\| = \|x\| + \|y\|$.
Es ist nach (i) $E'$ ein L-Raum, also $E$ ein M-Raum. ○

*Beweis von 1.1.6:*
Seien $E, F$ mit $\|T\|_r = \|T\|$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$.
Betrachte disjunkte $y_1, y_2 \in F_+$ und disjunkte $x'_1, x'_2 \in E'$ und einen Operator $T : E \to F$ mit

$$Tx = \langle x'_1 + x'_2, x\rangle y_1 + \langle x'_1 - x'_2, x\rangle y_2.$$

Nach 0.3(iii) existiert $|T|$ und es ist $|T|x = \langle x'_1 + x'_2, x\rangle(y_1 + y_2)$.
Es folgt

$$\|T\| = \|T\|_r = \||T|\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\langle x'_1 + x'_2, x\rangle(y_1 + y_2)\| = \|x'_1 + x'_2\| \cdot \|y_1 + y_2\|.$$

Andererseits ist

$$\|T\| = \|T'\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} \|T'y'\|.$$

Da $R(T')$ endlichdimensional folgt $\|T'\| = \|T'y'_0\|$ für ein $y'_0 \in \text{ball}(F')$.
Es folgt $\|x'_1 + x'_2\| \cdot \|y_1 + y_2\| = \|T'y'_0\| = \|\langle y'_0, y_1\rangle(x'_1 + x'_2) + \langle y'_0, y_2\rangle(x'_1 - x'_2)\|$
$\leq \| \, |\langle y'_0, y_1 + y_2\rangle| x'_1 + |\langle y'_0, y_1 - y_2\rangle| x'_2\|$.
Unterscheide nun zwei Fälle:
(a) $|\langle y'_0, y_1 + y_2\rangle| = |\langle y'_0, y_1 - y_2\rangle|$.
Dann ist für ein $i \in \{1, 2\}$ $\langle y'_0, y_i\rangle = 0$ und damit

$\|x'_1 + x'_2\| \cdot \|y_1 + y_2\| \leq \||\langle y'_0, y_j\rangle| x'_1 + |\langle y'_0, y_j\rangle| x'_2\|$ für $j \neq i$.
Nun folgt aber $\|y_1 + y_2\| \leq |\langle y_0, y_j\rangle| \leq \|y_j\|$.
Mit 1.1.8 folgt,dass $F$ ein M-Raum ist.
(b) $|\langle y'_0, y_1 - y_2\rangle| = \beta |\langle y'_0, y_1 + y_2\rangle|$, oBdA sei $0 < \beta < 1$.
Es folgt $\|x'_1 + x'_2\| \leq \|x'_1 + \beta x'_2\|$
$\iff (1-\beta)\|x'_1 + x'_2\| \leq (1-\beta)\|x'_1\|$
Nun folgt wieder,dass $E'$ ein M-Raum ist, daher ist $E$ ein L-Raum. ○

$\mathcal{L}(E,F)$ und $\mathcal{L}^r(E,F)$ können aber auch in anderen Fällen gleich sein. Da die Stetigkeit und Regularität eines Operators nicht von der Norm,sondern nur der induzierten Topologie (und der Ordnungsstruktur) von $E$ und $F$ abhängen,bleibt Satz 1.1.4 richtig, wenn $E$ (ordnungs-) isomorph zu einem L-Raum oder $F$ isomorph zu einem M-Raum (und $F$ monoton vollständig) ist.Da positive Operatoren zwischen Banachverbänden stetig sind, sind ordnungsisomorphe Banachverbände auch topologisch isomorph.
Auch die Isomorphie ist nicht notwendig, wie anhand eines Gegenbeispiels von Abramovich[3] gezeigt wird. Dieses Beispiel zeigt auch,dass zu $c > 1$ stets Banachverbände $E, F$ existieren mit $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, $\|T\|_r \leq c \cdot \|T\| \; \forall T \in \mathcal{L}(E,F)$,und $E, F$ nicht isomorph zu einem L-Raum bzw. M-Raum sind.

Zunächst benötigen wir noch zwei Sätze,nämlich einen über Regularität in *reflexiven* Räumen aus Xiong[15] und einen zweiten (längeren) über Isomorphie zu M-Räumen.

**1.1.9 Satz** *Ist $F$ ein reflexiver Banachverband,so gilt:*
(i) $\mathcal{L}(F', E') = \{T' : T \in \mathcal{L}(E,F)\}$
(ii) $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F) \iff \mathcal{L}(F',E') = \mathcal{L}^r(F',E')$.
(iii) *Sei* $R(E,F) = \sup\{\|T\|_r / \|T\| : T \in \mathcal{L}^r(E,F) \setminus \{0\}\}$.
*Ist* $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, *so ist* $R(E,F) = R(F',E')$.
*Beweis:* (i) Für $S \in \mathcal{L}(F',E')$ setze $T := S'_{|E}$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $T' = S$.
(ii) Seien $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$. Dann gilt $S \geq T \Rightarrow S' \geq T' \Rightarrow S'' \geq T'' \Rightarrow S \geq T$.
Zusammen mit (i) folgt für $T \in \mathcal{L}(E,F)$
$\exists S \geq T, 0 \iff \exists S' \geq T', 0$ und damit die Behauptung.
(iii) Folgt sofort aus (ii) und $\|T'\| = \|T\|$. ○

**1.1.10 Satz** *Für einen Banachverband $E$ sind äquivalent:*
(i) *$E$ ist isomorph zu einem M-Raum.*
(ii) *Jede präkompakte Teilmenge von $E$ besitzt ein Supremum.*
(iii) *Jede disjunkte Nullfolge in $E$ ist in $E''$ ordnungsbeschränkt.*
(iv) *Es gibt $C > 0$, so dass für endlich viele disjunkte Elemente $x_1, \dots, x_n$ von $E_+$ stets*

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq C \cdot \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$$

*Beweis:*(i)$\Rightarrow$(ii): Da Präkompaktheit nur von der induzierten Topologie abhängt, können wir oBdA annehmen, dass $E$ ein M-Raum ist. Dann ist $E''$ ein M-Raum mit Ordnungseins $e$.
Sei $A \subset E$ präkompakt. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^r \{x_i + 1/n\,\mathrm{ball}(E)\}$.
Für $z_n := x_1 \vee \cdots \vee x_r$ erhält man $x \leq z_n + n^{-1}e$ für alle $x \in A$. Für $y_n := z_1 \vee \cdots \vee z_n$ ergibt sich für alle $m \in \mathbb{N}$
$z_n \leq y_n \leq y_{n+m} \leq z_n + n^{-1}e \leq y_n + n^{-1}e \Rightarrow \|y_{n+m} - y_n\| \leq n^{-1} \to 0$ für $n, m \to \infty$
Es folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n + n^{-1}e = \sup(A)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) ist klar: Für $x_n \to 0$ ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kompakt, wegen (ii) insbesondere in $E''$ ordnungsbeschränkt.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Angenommen,(iv) sei falsch.
Setze für $x \in E_+$

$$Q(x) = \sup\{\|x_1 + \cdots + x_n\| : 0 \leq x_i \in E_x, \|x_i\| \leq 1, x_i \text{ disjunkt}\}$$

$Q$ ist auf $E_+$ monoton und wegen der Rieszschen Zerlegungseigenschaft subadditiv. Da (iv) nicht gilt, existiert eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $Q(x_n) > n$ und $\|x_n\| < 2^{-m}$,also $\sum_{n=1}^\infty x_n =: x_0$ absolut konvergent und $Q(x_0) = \infty$.
Konstruiere nun induktiv eine disjunkte Nullfolge ohne Supremum:
$n = 1$: Wähle disjunkte $0 \leq z_1, \dots, z_{r_1} \in E_{x_0} \cap 1/2\,\mathrm{ball}(E_+)$ mit $\|z_1 + \cdots + z_{r_1}\| > 4$. Es ist $r_1 > 2$.
Wähle $\delta > 0$ so, dass $\|(z_1 - 2\delta x_0)^+ + \cdots + (z_{r_1} - 2\delta x_0)^+\| > 3$ und $\delta\|x_0\| < 1/4$.
Dann folgt

$$x := (z_1 - \delta x_0)^+ + \cdots + (z_{r_1} - \delta x_0)^+ + (2\delta x_0 - (z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1}))^+$$

$$= (z_1 - \delta x_0)^+ \vee \cdots \vee (z_{r_1} - \delta x_0)^+ + (2\delta x_0 - (z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1}))^+$$

$$= (z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1} \vee \delta x_0) - \delta x_0 + (2\delta x_0) \vee z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1} - (z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1}) \geq \delta x_0$$

Also folgt $Q(x) = \infty \Rightarrow Q(z_i - \delta x_0)^+ = \infty$ für ein $i$
oder $Q(2\delta x_0 - (z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1}))^+ = \infty$.
Im ersten Fall folgt $Q(z_i) = \infty$, wir nehmen $Q(z_{r_1}) = \infty$ an.
Im zweiten Fall ersetze $z_{r_1}$ durch $(2\delta x_0 - z_1 \vee \cdots \vee z_{r_1})^+$. Dann sind die $z_i$ weiterhin disjunkt, und es ist $Q(z_{r_1}) = \infty$.
$n \to n+1$: Wähle disjunkte $0 \leq z_{r_n+1}, \ldots, z_{r_{n+1}} \in E_{z_{r_n}} \cap 2^{-n}\mathrm{ball}(E)$ mit

$$\|z_{r_n+1} + \cdots + z_{r_{n+1}}\| > 2^n, Q(z_{r_{n+1}}) = \infty$$

Diese existieren analog zum Fall $n = 1$.
Es ist nun $(z_j)_{j=1}^\infty$ eine Nullfolge. Setzt man $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ mit $y_{r_n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y_j = z_j$ sonst, so ist $y$ eine disjunkte Nullfolge.
Aber

$$\| \sup_{1 \leq j \leq n} y_j \| = \left\| \sum_{j=1}^n y_j \right\|$$

ist unbeschränkt, $y$ kann also nicht ordnungsbeschränkt sein.

(iv)$\Rightarrow$(i): Zeige, dass $E'$ isomorph zu einem L-Raum ist.
Seien $x_1', \ldots, x_n' \in E_+'$ disjunkt, $\varepsilon > 0$ und $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{ball}(E)_+$ ,so dass $\varepsilon/(2n) + \langle x_i', y_i \rangle \geq \|x_i'\|$ für $1 \leq i \leq n$. Dann existieren nach 1.1.7 disjunkte $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit $0 \leq x_i \leq y_i$ und $\langle x_i', x_i \rangle + \varepsilon/n \geq \|x_i'\|$ für $1 \leq i \leq n$. Sei $C > 0$ wie in (iv) und $x = x_1 + \cdots + x_n$, also $\|x\| \leq C$.
Es folgt

$$C\|x_1' + \cdots + x_n'\| \geq \langle x_1' + \cdots + x_n', x \rangle$$

$$\geq \langle x_1', x \rangle + \cdots + \langle x_n', x \rangle \geq \|x_1'\| + \cdots + \|x_n'\| - \varepsilon$$

Da $\varepsilon$ beliebig war, folgt $\|x_1'\| + \cdots + \|x_n'\| \leq C(\|x_1' + \cdots x_n'\|)$.
Sei $q(x') = \sup\{\|x_1'\| + \cdots + \|x_n'\| : x_1', \ldots, x_n' \in [0, |x'|] \text{ disjunkt}\}$
Aus der Zerlegungseigenschaft folgt,dass $q$ eine Norm auf $E'$ ist mit $\|x'\| \leq q(x') \leq C\|x'\|$ ,also $(E', q) \cong (E', \|.\|)$ und $q(x' + y') = q(x') + q(y')$ für $x', y' \in E'$ disjunkt.
Mit 1.1.8 folgt,dass $(E', q)$ ein L-Raum ist und daher $E$ isomorph zu einem M-Raum. ◯

**1.1.11 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$ mit $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, so dass $E$ nicht isomoprph zu einem L-Raum und $F$ nicht isomorph zu einem $M$-Raum ist.*

*Beweis:* Sei im folgenden $R(E,F)$ wie in 1.1.9 und
$P_M(E) = \sup\{\|x_1 + \cdots + x_n\| : x_i \in \text{ball}(E)_+ \text{ disjunkt}\}$.
Nach 1.1.10 ist $P_M(E) < \infty$ genau dann wenn $E$ isomorph zu einem M-Raum ist.
I. Sei $c > 1$. $E_n, F_n$ seien endlichdimensionale Banachverbände für die gilt:
(i) $\| |T| \| \leq c\|T\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(E_n, F_m), n, m \in \mathbb{N}$

$$\text{(ii)} \sup_{n\in\mathbb{N}} P_M((E_n)') = \sup_{n\in\mathbb{N}} P_M(E_n) = \infty.$$

Setze

$$E = \ell^1[E_n]_{n=1}^\infty, \quad F = \ell^\infty[E_n]_{n=1}^\infty.$$

Dann haben $E$ und $F$ die gewünschten Eigenschaften.

Aus (ii) folgt $P_M(E') = P_M(F) = \infty$, da sich $(E_n)'$ nach Hahn-Banach in $E$ und $F_n$ offensichtlich in $F$ isometrisch einbetten lassen. $E'$ und $F$ sind also nicht isomorph zu M-Räumen, damit ist $E$ nicht isomorph zu einem L-Raum.
Zeige nun $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$.
Sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $T_n := T_{|E_n}$ und $P_m$ die Projektion von $F$ auf $F_m$. $P_mT_n$ operiert also von $E_n$ nach $F_m$, also gilt
$\||P_mT_n|\| \leq c\|P_mT_n\| \leq c\|T_n\|$.
Sei für $x \in E$ $x_n$ seine $n$-te Komponente. Wir identifizieren $x_n$ mit dem Element von $E$, dessen $n$-te Komponente gleich $x_n$ und dessen übrige Komponenten Null sind.
Sei nun

$$y_{nm} = |P_mT_n|(x_n) \Rightarrow y_{nm} = \sup_{|x'|\leq x_n} P_mT_n[-x_n, x_n]$$

und

$$\|y_{nm}\| \leq c\|T_n\| \cdot \|x_n\| \leq c\|T\| \cdot \|x_n\|.$$

Da $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \leq \infty$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty y_{nm} =: \bar{y}_m$ absolut, und es ist $\|\bar{y}_m\| \leq \|c\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$.
Man erhält

$$\bar{y}_m = \sum_{n=1}^\infty \sup P_mT_n[-x_n, x_n] = \sum_{n=1}^\infty \sup P_mT[-x_n, x_n] \qquad (\text{da}[-x_n, x_n] \subset E_n)$$

$$\geq \sup P_m T \left[ -\sum_{n=1}^{\infty} x_n , \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right] = \sup P_m T[-x,x] =: y_m$$

Das Supremum existiert hier,da $F_m$ Dedekindvollständig ist.
Es folgt nun die Existenz von $|P_m T|$ und wegen $\bar{y}_m \geq y_m$ gilt
$\||P_m T|\| \leq c\|T\|$.
Es ist nun $S : E \to F$ mit $(Sx)_n = |P_n T|x$ stetig mit $\|S\| \leq c\|T\|$ und eine obere Schranke von $T$ und $-T$.

II. Es bleibt die Existenz von $E_n$ und $F_n$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) zu zeigen.
Hierzu benötigt man folgende Feststellungen:
a) Ist $E$ ordnungsisomorph zu $\mathbb{R}^k$, so ist

$$\lim_{p \to \infty} R(E, \ell^p) = R(E, \ell^\infty) = 1 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{s \downarrow 1} R(\ell^s, E) = R(\ell^1, E) = 1$$

b) Es ist $P_M(\ell_n^p) = n^{1/p}$.
Hierbei wie auch im folgenden sei $\ell_n^p = (\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$
Zu $(k_n)_{n=1}^\infty$ , $(p_{2n-1})_{n=1}^\infty$ und $(s_{2n})_{n=1}^\infty$ seien

$$E_{2n-1} = \ell^1_{k_{2n-1}} \quad , \quad F_{2n-1} = \ell^{p_{2n-1}}_{k_{2n-1}} \quad ,$$

$$E_{2n} = \ell^{s_{2n}}_{k_{2n}} \quad , \quad F_{2n} = \ell^{\infty}_{k_{2n}} \; .$$

Zeige nun durch Induktion,dass durch geeignete Wahl von $k_n, p_{2n-1}$ und $s_{2n}$ die $E_n$ und $F_n$ Eigenschaften (i),(ii) besitzen:
$n = 1$ : Wähle

$$1 < p_1 < \infty \quad \text{beliebig}, \qquad 1 < k_1 < \infty \quad \text{beliebig}$$

$$1 < s_2 < \infty, \quad \text{so dass} \quad R(\ell^{s_2}, F_1) < c$$

$$1 < k_2 < \infty, \quad \text{so dass} \quad P_M(E_2) \geq 2$$

$n \to n+1$ : Wähle

$$p_{2n-1} < p_{2n+1} < \infty, \quad \text{so dass} \quad R(E_j, \ell^{p_{2n-1}}) < c \quad \forall 1 \leq j \leq 2n$$

$$k_{2n} < k_{2n-1} < \infty, \quad \text{so dass} \quad P_M(F_{2n+1}) \geq 2n+1$$

$$s_{2n} > s_{2n+2} > 1, \quad \text{so dass} \quad R(\ell^{s_{2n+2}}, F_j) < c \quad \forall 1 \leq j \leq 2n+1$$

$$k_{2n+1} < k_{2n+2} < \infty, \quad \text{so dass} \quad P_M(E_{2n+2}) \geq 2n+2$$

Dass die $(k_n), (p_{2n-1}), (s_{2n})$ so gewählt werden können, folgt aus (a) und (b) sowie der offensichtlichen Tatsache $R(E, \ell^p) \geq R(E, \ell^p_n)$ und
$R(\ell^s, E) \geq R(\ell^s_n, E)$.
Es ist nun klar,dass die $E_n, F_n$ Eigenschaften (i),(ii) besitzen.

III. Zeige nun noch a) und b).
b) ist klar; in $\ell^p_n$ hat die Summe (=das Supremum) der $n$ Einheitsvektoren Norm $n^{1/p}$, und da es nicht mehr als $n$ disjunkte Elemente von $\ell^p_n$ ungleich 0 gibt, ist $P_M(\ell^p_n) \leq n^{1/p}$.
Für (a) stelle zunächst $\|x \vee y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ für $x, y \in \ell^p$ fest: Setze $x' = (x'_n)$ mit $x'_n = |x_n|$ falls $|x_n| \geq |y_n|$ und $x'_n = 0$ sonst; $y'$ entsprechend.
Dann ist $|x| \vee |y| = x' + y', x' \perp y', x' \leq x, y' \leq y$ und es folgt
$\|x \vee y\|^p \leq \|x' + y'\|^p = \|x'\|^p + \|y'\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$.

Sei nun $E \cong \mathbb{R}^k$ ,$\{e_1, \ldots, e_k\}$ die kanonische Basis von $E$, $T \in \mathcal{L}(E, \ell^p)$ mit $1 < p < \infty$. Dann erhält man $|T|$ nach 0.3(ii) durch

$$|T|x = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} T(\sigma_j \alpha_j e_j) : \sigma_j \in \{-1, 1\} \right\}$$

für $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j, \ \alpha_j \geq 0$. Ist nun $\|x\| \leq 1$,so ist auch für alle $\sigma_j \in \{-1, 1\}$ $\sum \|\sigma_j \alpha_j e_j\| = \|x\| \leq 1$. Da es $2^k$ verschiedene Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ gibt, folgt

$$\| |T| x \|^p \leq 2^k \|T\|^p \Rightarrow \| |T| \| \leq 2^{k/p} \|T\| \Rightarrow R(E, \ell^p) \to 1 \quad \text{für} \quad p \to \infty$$

Mit 1.1.9 folgt $R(\ell^s, E) \to 1$ für $s \downarrow 1$. ○

Unter gewissen Bedingungen gilt aber doch eine Umkehrung:

**1.1.12 Satz** *Sei $1 < p < \infty$,und jedes kompakte $T \in \mathcal{L}(L^p(0,1), E)$ sei als Operator nach $E''$ regulär. Dann ist $E$ isomorph zu einem M-Raum.*

Der Beweis benutzt die *Rademacher-Funktionen*,die zunächst vorgestellt werden:
Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h([2k, 2k+1)) = 1, \quad h([2k+1, 2k+2)) = -1$ für $k \in \mathbb{N}$.
Dann heißt für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$r_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad r_n(t) = h(2^n t)$$

die $n$-te Rademacherfunktion.
Es ist $r_n^2 = \mathbf{1}$ und für $n \neq m \quad \int_0^1 r_n(t) r_m(t)\ dt = 0$, die $r_n$ bilden also ein Orthonormalsystem.
Für $1 < p < \infty$ gelten die *Ungleichungen von Khinchin*:
Es gibt $A_p, B_p > 0$,so dass für alle $a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_p \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_p \leq B_p \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2}$$

Einen Beweis findet man bei Meyer-Nieberg[1],2.7.6.

Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n \in L^p(0,1) \iff (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$$

$L^p(0,1)$ besitzt also einen zu $\ell^2$ isomporphen Unterraum $R_p$.
Zudem existiert eine stetige Projektion $J_p : L^p(0,1) \to R_p$:
Für den Hilbertraun $L^2(0,1)$ ist das klar, ebenso für $p > 2$ wegen $L^p(0,1) \subset L^2(0,1)$. Für $1 < p < 2, 1/p + 1/q = 1$ sei $I_q : R_q \to L^q(0,1)$ die Einbettung. Dann ist $J_p := I_q'$ die gewünschte stetige Projektion.

*Beweis von 1.1.12:* Es ist nach 1.1.10 zu zeigen,dass jede disjunkte Nullfolge ordnungsbeschränkt in $E''$ ist.
I. Sei zunächst $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_+$ eine disjunkte Nullfolge mit Norm 1.
Zu $a \in \ell^2, c \in c_0$ definiere $S : \ell^2 \to E$ durch

$$S(b_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n v_n$$

Wegen $(a_n), (b_n) \in \ell^2$ konvergiert die rechte Seite absolut, und $S$ ist stetig mit $\|S\| \leq \|a\|_2$.
Sei $K : R_p \to \ell^2$ mit

$$K\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n\right) = (b_n c_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Wegen $c \in c_0$ ist $K$ kompakt,also ist auch $T := SKJ_p$ kompakt.
Existieren nun $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^+(L^p(0,1), E'')$ mit $T = T_1 - T_2$, so ist

$$(T_1 + T_2)\mathbf{1} \geq T_1(r_n^+ - r_n^-) + T_2(r_n^- - r_n^+) = T_1 r_n - T_2 r_n = T r_n = a_n c_n v_n$$

Die Folge $(a_n c_n v_n)$ ist also ordnungsbeschränkt in $E''$.
Dann ist $\left\{\sum_{n=N}^{M} a_n c_n v_n : N \leq M \in \mathbb{N}\right\}$ ordnungsbeschränkt,da die $v_n$ disjunkt sind, also ist ihre Norm beschränkt durch ein $C > 0$.
II.Jede disjunkte Nullfolge in $E$ hat die Gestalt $(a_n v_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a \in c_0, v$ wie in (i).oBdA sei $a \geq 0$. Sei $c \in c_0$ mit $c_n = \sqrt{a_n}$.
Für $b \in \ell^2$ erfüllt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n v_n$ die Cauchy-Bedingung:
$\left\|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n v_n\right\| \leq \max_{N \leq n \leq M} |c_n| \cdot \left\|\sum_{n=N}^{M} c_n b_n v_n\right\| \leq \max_{N \leq n \leq M} |c_n| \cdot C \to 0$ für $N, M \to \infty$.
Somit ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus $S : R_p \to E$ mit

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n v_n$$

ein stetiger linearer Operator.
Mit dem gleichen Argument ist auch $S_1 : S_1\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n v_n$ stetig und damit $S$ kompakt.
Setze $T := SJ_p$ und $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^+(L^p(0,1), E'')$ mit $T = T_1 - T_2$. Dann ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$(T_1 + T_2)\mathbf{1} \geq T_1 r_n - T_2 r_n = a_n v_n.$$

Damit folgt die Behauptung. ○

**1.1.13 Korollar** *Sei $1 < p < \infty$. Ist jeder kompakte Operator $T \in \mathcal{L}(E, L^p(0,1))$ regulär, so ist $E$ isomorph zu einem L-Raum.*

*Beweis:* Da $T$ genau dann kompakt ist, wenn $T'$ kompakt ist und $L^p(0,1)$ reflexiv, folgt mit 1.1.9 und 1.1.12,dass $E'$ isomorph zu einem M-Raum ist.

Also ist $E$ isomorph zu einem L-Raum. ○

Der Beweis von 1.1.12 zeigt, dass 1.1.12 und 1.1.13 nicht nur für $L^p(0,1)$ gelten, sondern für alle Banachverbände, für die eine stetige Projektion auf einen zu $\ell^2$ isomorphen Unterraum existiert.

## 1.2 $E$ ist ein L-Raum

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit die monotone Vollständigkeit von $F$ notwendig ist für die Regularität aller Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$,wenn $E$ ein L-Raum ist.
Wir folgen Abramovich und Wickstead[5].Zunächst ein Gegenbeispiel:

**1.2.1 Beispiel** $\mathcal{L}(L^1(0,1),c_0) \neq \mathcal{L}^r(L^1(0,1),c_0)$.
*Beweis:* Wähle $S : L^1(0,1) \to c_0$ mit

$$(Sf)_n = \int_0^1 f(t) r_n(t) dt$$

$r_n$ sei die n-te Rademacherfunktion.(vgl. 1.1.12)
Da die $r_n$ ein Orthonormalsystem bilden, liegt $Sf$ wirklich in $c_0$, und $S$ ist stetig mit Norm 1.
Nehme an, $S$ sei regulär. Sei $T \geq S, 0$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2T\mathbf{1} \geq T(\mathbf{1} + r_n) \geq S(\mathbf{1} + r_n) = Sr_n = e_n$$

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ besitzt also eine obere Schranke in $c_0$.Widerspruch. ○

Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen,dass die monotone Vollständigkeit von $F$ auch notwendig ist für die Allgemeingültigkeit von
$\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ mit einem L-Raum $E$. Setzt man $E$ als separabel voraus, so ist entsprechend monotone Folgenvollständigkeit notwendig.
Zunächst mehr über monotone (Folgen-)vollständigkeit:

**1.2.2 Satz** (i) *Ist $E$ monoton folgenvollständig, so existiert $\alpha > 0$,so dass für jede positive normbeschränkte wachsende Folge*
*$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \geq \alpha \|a\|$$

(ii) *Ist $E$ ein normierter Vektorverband, so ist $E'$ monoton vollständig.*
(iii) *Besitzt $E$ Eigenschaft (P), so ist $E$ auch monoton vollständig.*

*Beweis:* (i) Angenommen,es existiere nicht so ein $\alpha$. Dann gibt es zu $m \in \mathbb{N}$ positive,normbeschränkte wachsende Folgen $(a_n^{(m)})_{n=1}^{\infty}$ mit Supremum $a^{(m)}$, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n^{(m)}\| \leq 2^{-m}$ und $\|a^{(m)}\| \geq m$.
Setze $b_n = \sum_{m=1}^{n} a_n^{(m)}$. Dann ist $\|b_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n$ wächst mit $n$. Es existiert also $b := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$, und es ist für alle $n, m \in \mathbb{N}$ $b \geq a_n^{(m)}$, also $b \geq a^{(m)}$, es folgt $\|b\| \geq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Widerspruch.
(ii)Sei $A \subset E'$ normbeschränkt und aufwärts gerichtet.Dann existiert zu $x \in E$ stets $y_x := \sup\{\langle x', x\rangle : x' \in A\}$.
Wie in 0.1 zeigt man,dass durch $\langle y', x\rangle = y_x$ für $x \in E_+$ ein lineares Funktional $y' \in E'$ definiert ist, und dass $y' = \sup(A)$.
(iii) Sei $A \subset E$ normbeschränkt und aufwärts gerichtet. Nach (ii) besitzt $A$ ein Supremum $x$ in $E''$. Ist $P$ eine positive Projektion nach $E$, so ist $Px$ Supremum von $A$ in $E$. ($x$ liegt also schon in $E$) ○

Es folgen zwei technische Lemmata:

**1.2.3 Lemma** *Sei $E$ ein Dedekindvollständiger Banachverband.Jede Teilmenge $A \subset E$ mit paarweise disjunkten Elementen, für die $\{a_1 \vee \cdots \vee a_n : a_1 \in A, n \in \mathbb{N}\}$ normbeschränkt ist, besitze ein Supremum.*
*Dann ist $E$ monoton vollständig.*

**1.2.4 Lemma** *Sei $E$ ein $\sigma$-Dedekindvollständiger Banachverband.*
*Jede normbeschränkte,disjunkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$, für die $\{a_1 \vee \cdots \vee a_n : n \in \mathbb{N}\}$ normbeschränkt ist, besitze ein Supremum.*
*Dann ist $E$ monoton folgenvollständig.*

*Bemerkung:* Die ($\sigma$)-Dedekindvollständigkeit kann in der Voraussetzung auch jeweils weggelassen werden.Vergleiche 3.4.

Der Beweis für beliebiges $E$ benutzt Methoden der Darstellungstheorie, auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen werden kann.
Unter einer kleinen Zusatzannahme für $E$ (die von den meisten bekannten Banachverbänden erfüllt wird) lässt sich der Beweis mit einfacheren Mitteln

führen:
Wir nehmen an,$E'_n$ *sei punktetrennend.* $E'_n$ sei hierbei der Raum aller ordnungsstetigen Funktionale auf $E$
($E'_n = \{x' \in E' : \inf\{\langle x', x\rangle : x \in A\} = 0$ für alle abwärts gerichteten $A \subset E$ mit Infimum $0\}$). Es ist z.B.$(\ell^1)'_n = c_0$.
Es existiert nun ein kanonischer Verbandshomomorphismus $j : E \to (E'_n)'$, der jedem $x \in E$ die Einschränkung von $x$ als Element von $E''$ auf $E'_n$ zuordnet. Ist $E'_n$ punktetrennend (d.h. $\forall x \neq y \in E \ \exists x' \in E'_n$ mit $\langle x', x\rangle \neq \langle x', y\rangle$), so ist $j$ injektiv, also $E \to j(E)$ ein Verbandsisomorphismus.
Zudem ist nach einem Satz von Nakano $j(E)$ ein Ideal in $(E'_n)'$.
(Allerdings ist $j(E)$ i.a. kein Banachverband,also $j^{-1}$ i.a. nicht stetig, so dass nicht wie bei $E$ und $E''$ üblich $E$ mit $j(E)$ identifiziert werden kann.)

An dieser Stelle wird auch erstmals in dieser Arbeit der Satz von Kakutani für M-Räume benutzt; daher werden hier die wichtigsten Aussagen im Zusammenhang mit diesem Satz kurz vorgestellt:
Jeder M-Raum mit Ordnungseins ist isometrisch ordnungsisomorph zu einem Raum $C(X)$ mit einem kompakten Hausdorffraum $X$.
$C(X)$ ist dabei genau dann Dedekindvollständig,wenn $X$ *Stonesch* oder *extrem unzusammenhängend* ist (ist $V \subset X$ offen, so ist $\bar{V}$ offen) und genau dann $\sigma$-Dedekindvollständig,wenn $X$ quasi-Stonesch ist ($\bar{V}$ ist offen für jede offene $F_\sigma$-Menge $V \subset X$. Eine $F_\sigma$-Menge ist hierbei eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen).
Einen Beweis dieser Aussagen gibt es in [1],Kapitel 2.

*Beweis von 1.2.3:* Sei $A \subset E_+$ aufwärts gerichtet und normbeschränkt. Dann besitzt $j(A)$ ein Supremum $x'' \in (E'_n)'$.Zeige,dass $x'' \in j(E)$.
Wähle für das von $x''$ erzeugte Ideal eine Darstellung $C(X)$.Dann ist $x'' = \mathbf{1}$. $X$ ist ein extrem unzusammenhängender kompakter Hausdorffraum.
Sei nun für $a \in j(A)$

$$G_a = \overline{\{y \in X : a(y) > 1/2\}}.$$

$G_a$ ist offen und abgeschlossen.
Sei $\mathcal{C}$ ein maximales System paarweise disjunkter offener und abgeschlossener Mengen $G$ mit $G \subset G_a$ für ein $a \in j(A)$.Mit dem Zornschen Lemma sieht man sofort, dass so ein $\mathcal{C}$ existiert.

Dann ist

$$\bigcup_{a\in j(A)} G_a \subset \overline{\bigcup \mathcal{C}}.$$

Andernfalls wäre $G_0 := G_a \cap \overline{\bigcup \mathcal{C}}^c$ für ein $a \in j(A)$ nichtleer. $G_0$ ist aber offen,abgeschlossen ($G_a^c \cup \overline{\bigcup \mathcal{C}}$ ist offen), disjunkt zu allen $G \in \mathcal{C}$ und in einem $G_a$ enthalten, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{C}$. Weiter ist $\bigcup_{a\in j(A)} G_a$ dicht in $X$, sonst hätte man eine offene Menge $U \subset X$ mit $a(y) \leq 1/2$ für alle $a \in j(A), y \in U$, und $\mathbf{1} = x''$ wäre nicht die kleinste obere Schranke von $j(A)$. Es folgt $\overline{\bigcup \mathcal{C}} = X$ und daher

$$\sup\{\mathbf{1}_G : G \in \mathcal{C}\} = \mathbf{1}_{\overline{\bigcup \mathcal{C}}} = \mathbf{1} = x''.$$

Beachte,dass die $\mathbf{1}_G$ stetig sind, da $G$ offen und abgeschlossen ist.
Nun sind die $\mathbf{1}_G$ aber paarweise disjunkt,und wegen $\mathbf{1}_G \leq \mathbf{1}_{G_a} \leq 2a$ für ein $a \in j(A)$ liegen sie in $j(E)$, da $j(E)$ ein Ideal in $(E_n')'$ ist.
Ist $D$ das System ihrer endlichen Suprema, so ist $x'' = \sup(D)$ und $D \subset j(E)$.
Da $A$ aufwärts gerichtet ist, ist jedes $x \in D \leq 2j(a)$ für ein $a \in A$.
Somit ist $j^{-1}(D)$ normbeschränkt,nach Voraussetzung existiert $\sup j^{-1}(D)$ in $E$, also liegt $x'' = \sup D$ in $j(E)$.Es existiert damit $j^{-1}(x'') = \sup(A)$. ○

*Beweis von 1.2.4:* Ist im obigen Beweis $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \uparrow$, so lässt sich $\mathcal{C}$ statt mit dem Zornschen Lemma direkt definieren durch

$$\mathcal{C} = \{G_{a_n} \setminus G_{a_{n-1}} : n \in \mathbb{N}\}$$

mit $G_{a_0} = \emptyset$.
Dann ist $\mathcal{C}$ abzählbar und besitzt die gleichen Eigenschaften wie oben. Die Behauptung folgt dann analog. ○

Nun kommen wir zu den angekündigten Sätzen:

**1.2.5 Satz** *Sei $F$ ein $\sigma$-Dedekindvollständiger Banachverband. Dann sind äquivalent:*
(i) *$F$ ist monoton folgenvollständig.*
(ii) *$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ für jeden separablen L-Raum $E$.*
(iii) *$\mathcal{L}(L^1(0,1), F) = \mathcal{L}^r(L^1(0,1), F)$*

*Beweis:* (i)⇒(ii) ist Satz 1.1.4(ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) ist trivial.
(iii)$\Rightarrow$(i):Sei (iii) erfüllt.Angenommen, $F$ sei nicht monoton folgenvollständig. Dann existiert nach 1.2.4 eine disjunkte Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, so dass das System aller endlichen Summen der $e_n$ normbeschränkt durch $C$, $(e_n)$ aber nicht ordnungsbeschränkt ist. Setze $T : L^1(0,1) \to F$ mit

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e_n \cdot \int_0^1 f(t) r_n(t) \quad dt \right).$$

($r_n$ sei wieder die $n$-te Rademacherfunktion )
Die Reihe konvergiert für jedes $f$:Für $N, M \in \mathbb{N}$ ist

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} e_n \cdot \int_0^1 f(t) r_n(t) \quad dt \right\| \leq C \cdot \max_{N \leq n \leq M} \left\| \int_0^1 f(t) r_n(t) \quad dt \right\|$$

$\to 0$ für $N, M \to \infty$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist $T$ stetig. Analog zu 1.2.1 zeigt man, dass $T$ nicht regulär ist,im Widerspruch zu (iii).
$\bigcirc$

**1.2.6 Satz** *Sei $F$ ein Dedekindvollständiger Banachverband.Dann sind äquivalent:*
(i) *$F$ ist monoton vollständig.*
(ii) *$\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ für jeden L-Raum $E$.*

*Beweis:* (i)$\Rightarrow$(ii) ist 1.1.4(i)
(ii)$\Rightarrow$(i): Sei $A$ disjunkte Teilmenge von $F_+$ und $K > 0$ mit
$\|\sum_{a \in J} a\| \leq K$ für alle $J \subset A$ endlich.
Es ist zu zeigen, dass $A$ ein Supremum besitzt. Mit 1.2.3 folgt dann die Behauptung.
Sei $(\Omega, \Sigma, \mu)$ der Maßraum mit
$\Omega = \{(\omega_a)_{a \in A} : \omega_a \in \{0,1\}\}$, zugehöriger Produkt-$\sigma$-Algebra $\Sigma$ und Produktmaß $\mu$ mit
$\mu(\{\omega_a = 0\}) = \mu(\{\omega_a = 1\}) = 1/2$ für alle $a \in A$.
$\Sigma$-messbare Abbildungen von $\Omega$ nach $\mathbb{R}$ hängen nur von abzählbar vielen $\omega_a$ ab.
Sei $\varphi_a \in (L^1(\Omega, \Sigma, \mu))'$ mit

$$\langle \varphi_a, f \rangle = \int_{\{\omega_a = 0\}} f(\omega) \, d\mu - \int_{\{\omega_a = 1\}} f(\omega) \, d\mu.$$

Für jedes $f$ ist $\langle \varphi_a, f\rangle$ nur für abzählbar viele $a \in A$ ungleich 0.
Setze

$$S : L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \to F \quad \text{mit} \quad Sf = \sum_{a\in A} \langle \varphi_a, f\rangle a.$$

Um zu sehen,dass die Summe konvergiert, schreibe sie zunächst als $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle a_n$, denn es sind nur abzählbar viele Summanden ungleich Null. Wegen $\langle \varphi_a, f\rangle, \langle \varphi_a, f\rangle^+, \langle \varphi_a, f\rangle^- \leq \|f\|_1$ folgt für $J \subset \mathbb{N}$ endlich

$$\left|\sum_{n\in J} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle a_n\right| \leq \|f\|_1 \sum_{n\in J} a_n,$$

also

$$\left\|\sum_{n\in J} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle a_n\right\| \leq \|f\|_1 \cdot K.$$

Gleiches gilt für Positiv-und Negativteil von $\langle \varphi_{a_n}, f\rangle$, so dass wegen der monotonen Folgenvollständigkeit von $F$ (die aus 1.1.5 folgt) $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle^+ a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle^- a_n$
ordnungskonvergent sind, also auch $Sf$.
Sei $\alpha$ aus 1.2.2(i).Dann folgt

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{a_n}, f\rangle^{\pm} a\right\| \leq 1/\alpha \cdot K\|f\|_1, \quad \text{also} \quad \|Sf\| \leq 2/\alpha \cdot K\|f\|_1.$$

$S$ ist also auch stetig.
Ist $S$ regulär, so existiert $T \geq S, -S$.
Setze $f_a := \mathbf{1}_{\{\omega_a=0\}} \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.Dann ist $\langle \varphi_a, f_a\rangle = 1/2$.
Es folgt

$$T\mathbf{1} \geq Tf_a \geq |Sf_a| \geq |\langle \varphi_a, f_a\rangle| a = a/2.$$

Also hat $A$ eine obere Schranke,nämlich $2T\mathbf{1}$. Da $F$ Dedekindvollständig,besitzt $A$ auch ein Supremum. ○

Dass in den Sätzen 1.2.5 und 1.2.6 auf $(\sigma)$-Dedekindvollständigkeit nicht verzichtet werden kann, sieht man an einem Beispiel aus dem nächsten Abschnitt.Es gibt nämlich einen nicht $\sigma$-Dedekindvollständigen Banachverband $F$, so dass $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ für *jeden* Banachverband $E$. Eine vollständige Umkehrung von 1.1.4 haben wir also doch nicht.

Auch für vorgegebene L-Räume $E$ (auch unendlichdimensionale) braucht monotone Vollständigkeit von $F$ nicht notwendig zu sein. Ein wichtiges (und extremes) Beispiel kommt von Xiong[15]:

**1.2.7 Beispiel** *$\mathcal{L}(\ell^1, F) \equiv \mathcal{L}^r(\ell^1, F)$ für jeden Banachverband $F$.*

*Beweis:* Für $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ gilt
$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$; und die Reihe konvergiert absolut.
Es folgt für jeden stetigen Operator $S \in \mathcal{L}(\ell^1, F)$

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n S e_n.$$

Durch

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n |Se_n|$$

wird ein linearer stetiger Operator definiert: Es ist

$$\|Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n |Se_n|\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \|Se_n\| \leq \|S\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

und daher $\|T\| \leq \|S\|$.
Es ist nun $T \geq \pm S$,also ist $S$ regulär und $\|S\|_r = \|S\|$.
Zudem ist leicht zu sehen,dass $T = |S|$, denn für jede obere Schranke $U$ von $\pm T$ muss stets $Ue_n \geq |Te_n| = Se_n$ sein. ○

## 1.3 $F$ ist ein M-Raum

Wir wollen auch den Fall näher untersuchen, in dem der Bildraum $F$ ein M-Raum ist. Für M-Räume mit Ordnungseins benutzen wir in diesem Abschnitt häufiger eine Kakutani-Darstellung $C(X)$ mit einem kompakten Hausdorffraum $X$.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts stammen im wesentlichen aus Xiong[15], ergänzt mit einigen z.T.eigenen Beispielen.
Wir beginnen mit jeweils einem Gegenbeispiel für die bekanntesten nicht Dedekindvollständigen M-Räume.Das erste kommt von Kaplan[11],das zweite von H.Lotz und findet sich in[2]. :

**1.3.1 Beispiel** *Es gibt einen Banachverband $E$ mit $\mathcal{L}(E,c) \neq \mathcal{L}^r(E,c)$.*

*Beweis:* Sei $E$ der Raum aller Folgen $(x_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) Es gibt $c \in \mathbb{R}$, so dass $x_{nm} \to c$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in $m$
(ii) Es gibt zu $n \in \mathbb{N}$ $\quad c_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_{nm} \to c_n$ für $m \to \infty$.
Beachte, dass $E$ ein abgeschlossener Unterverband von $\ell^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ und daher ein Banachverband (mit $\|.\|_\infty$) ist.
Zeige nun:$\mathcal{L}(E, c(\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \neq \mathcal{L}^r(E, c(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$.
Dies ist offensichtlich äquivalent zur Behauptung.
Betrachte hierzu $T : E \to c(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ mit

$$(Tx)_{nm} = x_{n,2m-1} - x_{n,2m}.$$

$T$ ist linear und stetig mit Norm 2.
Sei nun $x \in E$, $c, c_n$ wie in der Definition von $E$.
Dann existiert zu $\varepsilon \geq 0 \quad n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{nm} - c| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ und alle $m \in \mathbb{N}$, es folgt $|(Tx)_{nm}| < \varepsilon$ für diese $n, m$.
Nun existiert auch $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{nm} - c_n| < \varepsilon/2$ für $m \geq m_0, n < n_0$. Es folgt, dass nur für endlich viele $(n, m)$ $|(Tx)_{nm}| \geq \varepsilon$, insbesondere liegt $Tx$ in $c(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
Zeige nun, dass $T$ nicht regulär ist.
Nehme an,es existiert $U \geq T, 0$.
Sei zu $n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{1}_n \in E$ mit $(\mathbf{1}_n)_{nm} = 1, \quad (\mathbf{1}_n)_{jm} = 0 \quad \forall j \neq n$.
Es folgt für alle $m \in N$

$$U\mathbf{1}_n \geq Ue_{n,2m-1} \geq Te_{n,2m-1} = e_{nm} \quad ,$$

also $(U\mathbf{1}_n)_{nm} \geq 1$ für unendlich viele $m$ und damit
$\lim(U\mathbf{1}_n) \geq 1$.
Für $k \in \mathbb{N}$ ist nun $U\mathbf{1} \geq \sum_{n=1}^{k} U\mathbf{1}_n$,
es folgt $\lim(U\mathbf{1}) \geq k$. Da $k$ beliebig war, ergibt sich ein Widerspruch. ○

**1.3.2 Beispiel** $\mathcal{L}(C[-1,1]) \neq \mathcal{L}^r(C[-1,1])$.
*Beweis:* Sei $T : C[-1,1] \to C[-1,1]$ mit

$$Tf(0) = 0 \quad , \quad Tf(t) = f(\sin(1/t)) - f(\sin(t + (1/t))).$$

Dann ist $T$ stetig und nicht regulär.
Zeige zunächst, dass $Tf$ wirklich stetig ist für $f$ stetig:

Stetigkeit außerhalb des Nullpunktes ist klar. Sei $\varepsilon > 0$.
Da $f$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$.
Weiter gilt für $t \neq 0 \quad |\sin(1/t) - \sin(t + (1/t))| \leq |t|$ nach dem Mittelwertsatz;
es folgt $|Tf(t)| < \varepsilon$ für $|t| < \delta$, also ist $Tf$ auch bei 0 stetig.
Es ist weiter $T$ stetig mit $\|T\| \leq 2$.
Nehme an, $T$ sei regulär, und $S \geq T, 0$.
*Behauptung:* Für $f \geq 0$ ist $Sf(0) \geq f(t) \quad \forall t \in [-1, 1]$.
Sei $0 < c < 2\pi$, für $n \in \mathbb{N}$ sei $t_n = (c + 2\pi n)^{-1}$.
Sei ferner $0 \leq g_n \leq f$ mit $g_n(\sin c) = f(\sin c), \quad g_n(\sin(c + t_n)) = 0$.
Es folgt $Sf(t_n) \geq Tg_n(t_n) = g_n(\sin(c + 2\pi n)) - g_n(\sin(t_n + c + 2\pi n)) = g_n(\sin c) - 0 = f(\sin c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wegen $t_n \to 0$ folgt $Sf(0) \geq f(t)$ für alle $t \in [-1, 1]$, also die Behauptung.
Seien nun zu $n \in \mathbb{N} \quad f_1, \ldots, f_n \in C[-1, 1]$ mit
$0 \leq f_i \leq \mathbf{1}, f_i$ paarweise disjunkt , $f_i(t) = 1$ für ein $t \in [-1, 1]$. Dann folgt

$$S\mathbf{1}(0) \geq \sum_{i=1}^{n} Sf_i(0) \geq n.$$

Widerspruch, da $n$ beliebig war. ○

Anders als in 1.2 gibt es aber auch nicht Dedekindvollständige M-Räume $F$ , so dass $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ für jeden Banachverband $E$.

**1.3.3 Beispiel** *Sei $F = \{(x, y) \in \ell^\infty \times \ell^\infty : x - y \in c_0\}$.*
*Dann ist $F$ ein M-Raum mit Ordnungseins, und es gilt $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ für jeden Banachverband $E$.*
*$F$ ist aber nicht $\sigma$-Dedekindvollständig.*

*Beweis:* Schreibt man die Elemente von $F$ als $(x, x + y)$ mit $x \in \ell^\infty, y \in c_0$, so sieht man sofort, dass $F$ mit $\|.\|_\infty$ ein Banachraum ist.
$F$ ist auch ein Unterverband von $\ell^\infty \times \ell^\infty$: Für $(x_i, x_i + y_i) \in F$ ist
$(x_1, x_1 + y_1) \vee (x_2, x_2 + y_2) = (x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 + y)$ mit
$|y| \leq |y_1| + |y_2|$, also $y \in c_0$.
Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $Tx = (y_1, y_2)$. Dann sind durch $T_i x = y_i, \ i = 1, 2$
$T_i \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ gegeben, somit existieren nach 1.3.3
$S_i \geq T_i, 0$. Setze $S$ mit $Sx = ((S_1 + S_2)x, (S_1 + S_2)x))$. Dann ist $S$ stetiger Operator von $E$ nach $F$ mit $S \geq T, 0$. $T$ ist also regulär.

$F$ ist aber nicht $\sigma$-Dedekindvollständig:
Ist $x^{(n)} \in \ell^\infty$ mit $x_m^{(n)} = 1$ für $m \leq n$ und $x_m^{(n)} = 0$ für $m > n$, so ist

$$\{(x^{(n)}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$$

eine abzählbare ordnungsbeschränkte Teilmenge von $F$ ohne Supremum in $F$. ○

*Anmerkung:* Dieses Beispiel ist neu. In der Literatur finden sich nur nicht elementare Beispiele für diesen Fall,siehe z.B.[5] und [13].

Ist umgekehrt $F$ ein Dedekindvollständiger M-Raum,so dass stets $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, so muss $F$ eine Ordnungseins besitzen.
Denn nach 1.2.6 muss $F$ monoton vollständig sein. Da $F$ ein M-Raum, ist $\mathrm{ball}(F)$ aufwärts gerichtet, und so existiert $e = \sup \mathrm{ball}(F)$.
Dann folgt $\mathrm{ball}(F) \subset [-e, e]$ und damit $F_e = F$, d.h. $e$ ist eine Ordnungseins.

Wir betrachten nun M-Räume $F$ mit Ordnungseins . Stellt man solche Räume als $C(X)$ dar, so existieren Zusammenhänge zwischen der Topologie von $X$ und der Gültigkeit von $\mathcal{L}^r(E, C(X)) = \mathcal{L}^r(E, C(X))$.

**1.3.4 Satz** *Sei $X$ ein kompakter Hausdorffraum. Ist für jeden Banachverband $E$ $\mathcal{L}(E, C(X)) = \mathcal{L}^r(E, C(X))$, so wird jede konvergente Folge in $X$ konstant.*

*Beweis:* Wir konstruieren positive Operatoren $S_1 : c \to C(X), S_2 : C(X) \to c$ mit $S_2S_1 = id_c$. Wäre dann $\mathcal{L}(E, C(X)) = \mathcal{L}^r(E, C(X))$, so wäre für $T \in \mathcal{L}(E, c)$ $\;T = S_2S_1T$, $S_1T$ regulär und $S_2$ positiv, also $T$ regulär.Wie 1.3.1 zeigt, ist aber $T$ nicht immer regulär, es folgt die Behauptung.
Sei $(t_n)_{n=1}^\infty$ konvergente Folge in $X$, die nicht konstant wird.Durch Teilfolgenauswahl lässt sich erreichen, dass die $t_n$ paarweise verschieden sind.
Setze $S_2 : C(X) \to c$ mit $(S_2f)_n = f(t_n)$. Da $t_n$ konvergiert und $f$ stetig, landet $S_2f$ wirklich in $c$, und $S_2$ ist positiv.
Wähle nun disjunkte offene Umgebungen $U_n$ von $t_n$, stetige $[0,1]$-wertige Funktionen $h_n$ mit $h_n(t_n) = 1$ und $h_n(t) = 0$ für $t \notin U_n$ nach dem Satz von Urysohn. Für $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c$ setze

$$S_1x = \lim(x) \cdot \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \lim(x))h_n.$$

Da die $h_n$ disjunkt sind, existiert die Summe auf der rechten Seite. Es ist nun $S_1$ linear und positiv wegen $0 \leq h_n \leq \mathbf{1}$
Schließlich ist für $x \in c$

$$(S_2 S_1 x)_n = S_1 x(t_n) = \lim(x) + (x_n - \lim(x)) h_n(t_n) = x_n.$$

Also $S_2 S_1 = id$.

Beachte auch, dass $\|S_1\| = \|S_2\| = 1$. Für $S_2$ ist das klar. Für $t \in C(X)$ ist $S_1 x(t) = \lim(x)(1 - h_n(t)) + h_n(t) x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit $|S_1 x(t)| \leq \|x\|$. Es folgt $\|S_1\| \leq 1$. $\|S_1\| \geq 1$ ist klar. ◯

Wie der Beweis zeigt, kann man in 1.3.4 die Bedingung "jeder Banachverband $E$" durch schwächere Bedingungen ersetzen wie "jeder Raum C(Y)" oder den speziellen Raum aus 1.3.1.

**1.3.5 Korollar** *Ist $X$ ein kompakter* metrischer *Raum , so dass stets $\mathcal{L}(E, C(X)) = \mathcal{L}^r(E, C(X))$, so ist $X$ endlich, also $C(X) \cong \mathbb{R}^n$.*

*Beweis:* In dem kompakten metrischen Raum $X$ hat jede Folge eine konvergente Teilfolge. Mit 1.3.4 folgt, dass jede Folge in $X$ eine konstante Teilfolge besitzt. Also muss $X$ endlich sein. ◯

Die notwendige Bedingung aus 1.3.4 lässt sich auch noch weiter verschärfen.Siehe [13]. Diese stärkeren Bedingungen sind jedoch recht kompliziert und zudem auch nicht hinreichend, so dass hierauf verzichtet wird. Ebenfalls nicht hinreichend ist es, wenn $C(X)$ $\sigma$-Dedekindvollständig ist:

**1.3.6 Beispiel** *Es gibt einen Banachverband $E$ und einen $\sigma$-Dedekindvollständigen M-Raum $F$ mit Ordnungseins, so dass*
*$\mathcal{L}(E, F) \neq \mathcal{L}^r(E, F)$.*
*Beweis:* Sei $F$ der Raum aller beschränkten Funktionen auf $[0,1]^2$, die auf dem Komplement einer abzählbaren Menge konstant sind.
$F$ ist mit $\|.\|_\infty$ ein $\sigma$-Dedekindvollständiger M-Raum mit Ordnungseins.
$E$ sei der Raum aller beschränkten Funktionen $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt:
Es existiert ein $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ,so dass $g$ auf dem Komplement einer abzählbaren Menge konstant und
$\{(x,y) : f(x,y) \neq g(y)\}$ abzählbar ist. $E$ ist ebenfalls ein M-Raum mit Ordnungseins.

Setzt man $T : E \to F$ mit $Tf(x,y) = f(x,y) - f(x/2,y)$, so ist $T$ wirklich Operator von $E$ nach $F$, linear und stetig mit Norm 2.(vgl. 1.3.1)
Angenommen, $T$ sei regulär. Sei $S \geq T, 0$.
Sei für $t \in [0,1]$

$$f_t = \mathbf{1}_{\{(s,t)\,:\,s \in [0,1]\}}.$$

Es folgt für $t \in [0,1], s \in (0,1]$

$$Sf_t(s,t) \geq Se_{s,t}(s,t) = 1,$$

also $Sf_t \geq 1$ auf dem Komplement einer abzählbaren Menge.
Sind nun zu $n \in \mathbb{N}$ $t_1, \ldots, t_n$ paarweise verschieden, so folgt

$$S\mathbf{1} \geq \sum_{k=1}^{n} Sf_{t_k},$$

und damit $S\mathbf{1} \geq n$ auf dem Komplement einer abzählbaren Menge.
Da $n$ beliebig war, folgt dass $S\mathbf{1}$ unbeschränkt ist. Widerspruch. ○

Wenden wir uns nun speziellen Banachverbänden $E$ zu:

**1.3.7 Satz** *Sei $E_0$ der von allen Atomen von $E$ erzeugte (algebraische) Unterraum von $E$.Ein Atom ist hierbei ein Element $x \in E_+$ mit*
$[0,x] = \{\alpha x : 0 \leq \alpha \leq 1\}$
*Ist $\bar{E}_0 = E$, so ist $\mathcal{L}(E,F) \equiv \mathcal{L}^r(E,F)$ für jeden M-Raum $F$.*

*Beweis:* Sei $T \in \mathcal{L}(E,F), x \in E_0$,
$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit Atomen $x_i$.
Setze $S_0 : E_0 \to F$ mit

$$S_0 x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |Tx_i|.$$

Mit 0.3(ii) folgt

$$S_0 x = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} T(\sigma_j \lambda_j x_j) : \sigma_j \in \{-1,1\}\right\}.$$

Da $F$ ein M-Raum ist, ergibt sich $\|S_0 x\| = \|Tx\|$. $S_0$ ist also stetig mit $\|S_0\| \leq \|T\|$. Sei nun für $x \in E, (x_n) \subset E_0$ mit $x_n \to x$ (normweise), so setze $Sx = \lim_{n\to\infty} S_0 x_n$. Da $S_0$ stetig ist, ist dieser Limes unabhängig von der Wahl der $x_n$. Nun ist $S$ eine Fortsetzung von $S_0$ mit gleicher Norm, und für $x \geq 0$ ist

$$Sx = S|x| = \lim_{n\to\infty} S_0|x_n| \geq 0$$

und

$$Sx = \lim_{n\to\infty} T|x_n| = Tx.$$

Es ist also $T$ regulär mit $\|T\|_r = \|T\|$. ○

Räume mit der Eigenschaft aus 1.3.7 sind $\ell^p (1 \leq p < \infty)$ und $c_0$ sowie deren Unterräume; auch $\ell^p(I)$ und $c_0(I)$ mit einer beliebigen Indexmenge $I$, da die Elemente dieser Räume nur an abzählbar vielen Stellen ungleich Null sind.
Nicht dazu gehören $c, \ell^\infty$ und alle anderen (unendlichdimensionalen) Räume mit Ordnungseins.

Mit Urbildräumen mit Ordnungseins beschäftigen sich die nachfolgenden Sätze:

**1.3.8 Satz** *Sei $X$ ein kompakter Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:*
(i) *$X$ ist folgenkompakt und hat genau $n$ Limespunkte, $n < \infty$.*
*Ein Limespunkt ist hierbei ein Element $x \in X$, das Limes einer nicht konstant werdenden Folge in $X$ ist.*
(ii) *$X$ enthält einen diskreten dichten Unterraum $A$ mit $|X \setminus A| = n$.*
(iii) *$X$ ist die topologische Summe von $n$ Einpunktkompaktifizierungen diskreter Räume.*
(iv)$C(X) \cong c(I_1) \oplus \cdots \oplus c(I_n)$ *mit beliebigen Indexmengen $I_1, \ldots, I_n$*
(v) $\mathcal{L}(C(X), C(Z)) = \mathcal{L}^r(C(X), C(Z))$ *für jeden kompakten Hausdorffraum $Z$.*
(vi) $\mathcal{L}(C(X), c) = \mathcal{L}^r(C(X), c)$
(vii) *Es gibt einen kompakten Hausdorffraum $Y$ mit nicht konstant werdender konvergenter Folge und $\mathcal{L}(C(X), C(Y)) = \mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$.*

**1.3.8a Satz** *Sei $X$ ein kompakter Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:*
(i a) *$X$ ist folgenkompakt und hat genau einen Limespunkt.*
(ii a) *$X$ ist die Einpunktkompaktifizierung eines diskreten Raumes.*

(iii a)$C(X) \cong c(I)$ *mit einer beliebigen Indexmenge* $I$
(iv a) $\mathcal{L}(C(X), C(Z)) \equiv \mathcal{L}^r(C(X), C(Z))$ *für jeden kompakten Hausdorffraum* $Z$.
(v a) $\mathcal{L}(C(X), c) \equiv \mathcal{L}^r(C(X), c)$
(vi a) *Es gibt einen kompakten Hausdorffraum* $Y$ *mit nicht konstant werdender konvergenter Folge und* $\mathcal{L}(C(X), C(Y)) \equiv \mathcal{L}^r(C(X), C(Y))$.

*Beweis:* (i)⇒(ii) Sei $X_\ell$ die Menge der Limespunkte von $X$. Es ist klar, dass $X \setminus X_\ell$ dicht in $X$ liegt.
Sei nun $x \in X \setminus X_\ell$. Zeige, dass $\{x\}$ offen ist.
$X \setminus X_\ell$ ist offen, da $X_\ell$ endlich ist.Also existiert eine offene Umgebung $V$ von $x$ mit $V \subset \bar{V} \subset X \setminus X_\ell$. $\bar{V}$ kann nicht unendlich sein, sonst wäre ein Limespunkt in $\bar{V}$.
Also ist $\bar{V} \setminus \{x\}$ endlich,also abgeschlossen, und
$\{x\} = V \setminus (\bar{V} \setminus \{x\})$ ist offen.
(ii)⇒(iii): Seien $x_1, \dots, x_n \in X \setminus A$, $U_1, \dots, U_n$ seien paarweise disjunkte offene Umgebungen von $x_1, \dots, x_n$. Da $A$ diskret ist, lassen sich die $U_i$ so wählen, dass $\bigcup U_i = X$.
Dann sind alle $U_i$ auch abgeschlossen, damit ist $X$ topologische Summe der $U_i$. Sei nun $V \subset U_i$. Ist $x_i \in V$, so ist $U_i \setminus V$ offen, also $V$ kompakt. Ist $x_i \notin V$, so ist $V$ diskret, also genau dann kompakt, wenn $V$ endlich ist. Damit ist $U_i$ die Einpunktkompaktifizierung des diskreten Raumes $U_i \setminus \{x_i\}$.
(iii)⇒(iv):Sei $X = \alpha I_1 + \dots + \alpha I_n$; die topologische Summe der Einpunktkompaktifizierungen der diskreten Räume $I_1, \dots, I_n$. $x_k$ sei der Limespunkt von $I_k$.
$f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(a, b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ offen ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn für jedes $k$ mit $f(x_k) \in (a, b)$
$\{x \in I_k : f(x) \notin (a, b)\}$ endlich ist, also $\{f(x); x \in I_k\}$ konvergent mit Limes $f(x_k)$, mit anderen Worten
$f \in c(I_1) \oplus \dots \oplus c(I_n)$.
(v)⇒(vii) und (iv)⇒(vi) sind trivial.
(vii)⇒(vi) wurde in 1.3.4 gezeigt.
(i)a⇒(ii)a⇒(iii)a folgt analog zu oben, wenn man noch $n = 1$ voraussetzt.
(vi)a⇒(v)a folgt ebenfalls aus dem Beweis von 1.3.4, wenn man beachtet, dass in diesem Beweis $\|S_1\| = \|S_2\| = 1$ gilt.

Der Beweis wird abgeschlossen durch die folgenden Sätze.
(iv)⇒(v) und (iii)a⇒(iv)a folgen aus 1.3.9,

(vi)$\Rightarrow$(i) und (v)a$\Rightarrow$(i)a folgen aus 1.3.10 und 1.3.11. $\bigcirc$

**1.3.9 Satz** (i) *Sei $I$ eine beliebige Indexmenge, $Z$ ein kompakter Hausdorffraum.*
*Dann ist $\mathcal{L}(c(I), C(Z)) \equiv \mathcal{L}^r(c(I), C(Z))$.*
(ii) *Seien $I_1, \ldots, I_n$ beliebige Indexmengen,$E = c(I_1) \oplus \cdots \oplus c(I_n)$*
*Dann ist $\mathcal{L}(E, C(Z)) = \mathcal{L}^r(E, C(Z))$.*

*Beweis:* (i) Sei $S \in \mathcal{L}(c(I), c(Z))$. Für $z \in Z, N \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(j_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $j_n \in I$ paarweise verschieden sei $y \in c(I)$ mit

$$y_{j_n} = \begin{cases} 1; & 1 \leq n \leq N; \quad Se_{j_n}(z) \geq 0 \\ -1; & 1 \leq n \leq N; \quad Se_{j_n}(z) < 0 \\ 1; & \quad\quad n > N; \quad S\mathbf{1}(z) - \sum_{i=1}^{N} Se_{j_i}(z) \geq 0 \\ -1; & \quad\quad n > N; \quad S\mathbf{1}(z) - \sum_{i=1}^{N} Se_{j_i}(z) < 0 \end{cases}$$

$(y_{j_n})_{n=1}^{\infty}$ ist ab Index $N+1$ konstant 1 oder -1, kann also zu $(y_i)_{i \in I} \in c(I)$ fortgesetzt werden.
Man erhält nun

$$\|S\| \geq \|Sy\| \geq Sy(z) = \sum_{i=1}^{N} (y_{j_i} - \lim(y)) Se_{j_i}(z) + \lim(y) S\mathbf{1}(z)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |Se_{j_i}(z)| + |S\mathbf{1}(z) - \sum_{i=1}^{N} Se_{j_i}(z)|$$

Durch Grenzübergang ergibt sich (jeweils punktweise)

$$\text{(a)} \quad \|S\|\mathbf{1}_Z \geq \sum_{n=1}^{\infty} |Se_{j_n}| + \left| S\mathbf{1} - \sum_{n=1}^{\infty} Se_{j_n} \right|$$

$$\text{(b)} \quad 1/2(S\mathbf{1} + \|S\|\mathbf{1}_Z) \geq S\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (Se_{j_n})^{-}$$

$$\text{(c)} \quad 1/2(S\mathbf{1} + \|S\|\mathbf{1}_Z) \geq \sum_{n=1}^{\infty} (Se_{j_n})^{+}$$

Sei nun $x = (x_i)_{i \in I} \in c(I)$. $x$ ist auf dem Komplement einer abzählbaren Menge $A$ konstant.

Sei $J = (j_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $I$, die $A$ enthält; die $j_n$ seien paarweise verschieden. Es ist klar, dass $(x_{j_n})_{n=1}^\infty$ gegen $\lim(x)$ konvergiert.
Setze $T : c(I) \to C(Z)$ mit

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{j_n} - \lim(x))(Se_{j_n})^+ + 1/2 \lim(x)(S\mathbf{1} + \|S\|\mathbf{1}_Z).$$

$T$ ist von der Wahl von $(j_n)$ unabhängig.
Mit (b) und (c) folgt $T \geq S, 0$, $S$ ist also regulär.
Zeige nun noch $\|S\| = \|S\|_r$.
Sei $x \in c(I), \|x\| \leq 1$. Setze $h = 1/2(S\mathbf{1} + \|S\|\mathbf{1}_Z)$.
Es ergibt sich

$$\|(2T - S)x\| = \sup_{z \in Z} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_{j_n} |Se_{j_n}(z)| + \lim(x) \left( 2h(z) - S\mathbf{1}(z) - \sum_{n=1}^{\infty} |Se_{j_n}(z)| \right) \right|$$

$$\leq \|x\| \sup_{z \in Z} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_{j_n} |Se_{j_n}(z)| + 2h(z) - S\mathbf{1}(z) - \sum_{n=1}^{\infty} |Se_{j_n}(z)| \right|$$

$$\leq \sup_{z \in Z} |2h(z) - S\mathbf{1}(z)| = \|S\|.$$

Wegen $2T - S \geq S, -S$ folgt $\|S\|_r = \|S\|$.
(ii) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in c(I_i)$.
Zu $S \in \mathcal{L}(E, C(Z))$ sei
$S_i : c(I_i) \to C(Z)$ mit $S_i x_i = S(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$.
Nach (i) gibt es zu $S_i$ ein $T_i \geq S_i, 0$.
Setze $T$ mit $Tx = \sum_{i=1}^n T_i x_i$. Dann ist $T \geq S, 0$. ○

**1.3.10 Lemma** *Sei $X$ kompakter Hausdorffraum. Dann gilt:*
(i) *Ist $\mathcal{L}(C(X), c) = \mathcal{L}^r(C(X), c)$, so hat $X$ endlich viele Limespunkte.*
(ii) *Ist $\mathcal{L}(C(X), c) \equiv \mathcal{L}^r(C(X)c)$, so hat $X$ genau einen Limespunkt.*

*Beweis:* (i) Seien alle stetigen Operatoren von $C(X)$ nach $c$ regulär. Dann ist nach dem Satz vom inversen Operator $id : (\mathcal{L}^r(C(X), c), \|.\|_r) \to (\mathcal{L}(C(X), c), \|.\|)$ stetig (also $\|.\|$ und $\|.\|_r$ äquivalent). Sei $M$ seine Norm.
Nehme nun an, die Menge $X_\ell$ der Limespunkte von $X$ sei unendlich. Sei $N \in \mathbb{N}, N > M$. Wähle $N$ Limespunkte $x_{1\infty}, \ldots, x_{N\infty}$
und paarweise disjunkte, nicht konstant werdende Folgen $(x_{in})_{n=1}^\infty$ mit

$x_{in} \to x_{i\infty}$.
Setze

$$T \in \mathcal{L}(C(X), c(\mathbb{N} \times \{1, \ldots, N\}))$$

mit

$$Tf = (y_{in})_{i,n=1}^{i=N,n=\infty}; \quad y_{in} = f(x_{in}) - f(x_{i\infty}).$$

Es ist klar, dass $(y_{in})$ für alle $i$ und $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, also $Tf \in c(\mathbb{N} \times \{1, \ldots, N\})$, und dass $T$ stetig ist mit Norm 2. Nach Voraussetzung ist $T$ dann auch regulär. Sei $S \geq T, 0$. Definiere positive lineare Funktionale $\varphi_\infty$ und $\varphi_{in}, 1 \leq i \leq N, n \in \mathbb{N}$
mit

$$\langle \varphi_{in}, f \rangle = (Sf)_{in}, \quad \langle \varphi_\infty, f \rangle = \lim(Sf).$$

Sei weiter zu $x \in X$ $\delta_x$ das zugehörige Dirac-Funktional. Wegen $S \geq T, 0$ ist $\varphi_{in} \geq 0$ und $\varphi_{in} \geq \delta_{x_{in}} - \delta_{x_{i\infty}}$.
Es folgt wegen $\delta_{x_{in}} \perp \delta_{x_{i\infty}}$ $\varphi_{in} \geq (\delta_{x_{in}} - \delta_{x_{i\infty}})^+ = \delta_{x_{in}}$.
Für $f \geq 0$ folgt

$$\langle \varphi_\infty, f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_{in}, f \rangle \geq \lim_{n\to\infty} \langle \delta_{x_{in}}, f \rangle = \lim_{n\to\infty} f(x_{in}) = f(x_{i\infty}) = \langle \delta_{x_{i\infty}}, f \rangle.$$

also $\varphi_\infty \geq \delta_{x_{i\infty}}$.
Da die $\delta_{x_{i\infty}}$ für $1 \leq i \leq N$ paarweise disjunkt sind, folgt

$$\varphi_\infty \geq \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_{i\infty}}.$$

Es folgt für alle $f \in C(X)$

$$\lim((2S - T)f) = 2\langle \varphi_\infty, f \rangle - 0 \geq 2 \sum_{i=1}^{N} f(x_{i\infty}),$$

also insbesondere $\lim((2S - T)\mathbf{1}) \geq 2N$ und damit $\|2S - T\| \geq 2N = N\|T\|$.
Da $S \geq T, 0$ beliebig war und sich jedes $U \geq T, -T$ als $U = 2S - T$ mit $S \geq T, 0$ schreiben lässt, folgt $\|T\|_r \geq N\|T\| > M\|T\|$. Widerspruch.
(ii) Nehme im obigen Beweis an, es gebe zwei Limespunkte, und erhalte $\|T\|_r \geq 2\|T\|$, im Widerspruch zur Voraussetzung. ○

Ist $X$ nicht folgenkompakt, so ist die Konstruktion eines Gegenbeispiels etwas länglich.

**1.3.11 Satz** *Sei $X$ ein kompakter Hausdorffraum.*
*Ist $X$ nicht folgenkompakt, so ist $\mathcal{L}(C(X), c) \neq \mathcal{L}^r(C(X), c)$.*

*Beweis:* I.Sei $(y_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $X$ ohne konvergente Teilfolge, die $y_n$ seien paarweise verschieden.
Setze nun $X_2 := X$ und wähle zwei verschiedene Häufungspunkte $a, b \in X_2$ von $(y_n)$ (diese existieren, da $X$ kompakt und $(y_n)$ nicht konvergent ist) und disjunkte kompakte Umgebungen $X_3$ von $a$, $X_4$ von $b$. $X_3$ und $X_4$ enthalten jeweils eine Teilfolge von $(y_n)$.
Wähle induktiv für $X_i$ disjunkte kompakte Umgebungen $X_{2i-1}, X_{2i}$ wie oben.
Dann ergibt sich eine Folge $(X_i)_{i=2}^\infty$ von kompakten Mengen in $X$ mit
$X_{2i-1} \cap X_{2i} = \emptyset$ und $X_{2i-1} \cup X_{2i} \subset X_i$ für $i \geq 2$, und alle $X_i$ enthalten eine Teilfolge von $(y_n)$.
II. Wähle $x_i \in X_i$. Definiere zu $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n \in C(X)'$ mit

$$\langle \varphi_n, f \rangle = 2^{1-n} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f(x_k).$$

Setze

$$D \subset C(X) = \{f \in C(X) : (\langle \varphi_n, f \rangle)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert}\}$$

und

$$\varphi : D \to \mathbb{R} \text{ mit } \langle \varphi, f \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \varphi_n, f \rangle.$$

$D$ ist ein Untervektorraum von $C(X)$, und $\varphi$ ist stetig mit Norm 1.
Setze $\varphi$ nach Hahn-Banach zu $\phi \in C(X)'$ mit $\|\phi\| = 1$ fort.
$\phi$ definiert ein Borelsches Maß $\mu$.
Wähle zu $i \geq 2, 2^{n-1} < i \leq 2^n$, eine stetige Funktion $g$ mit $g(X_i) = \{1\}$ und $g(X_j) = \{0\}$ für alle $j \neq i$ mit $2^{n-1} < j \leq 2^n$.
Dann ist $g = \mathbf{1}_{X_i} \quad \mu -$ fast überall und $\mu(X_i) = \int_X g \, d\mu = \phi(g)$.
Für $m \geq n-1$ ist $\varphi_n(g) = 2^{1-n}$, also $\mu(X_i) = 2^{1-n}$.
III. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $g_n \in C(X)$ mit $g_n(X_i) = \{(-1)^i\}$ für $2^{n-1} < i \leq 2^n$.
Dann ist $|g_n| = 1 \quad \mu$-fast überall und $g_1 = \mathbf{1}$.
Für $n < m$ ist $\int_X g_n g_m \, d\mu = 0$ und $\int_X g_n^2 \, d\mu = 1$.
Die $g_n$ bilden also eine Orthonormalfolge in $L^2(\mu)$.
Setze

$$S : C(X) \to c_0 \quad \text{mit} \quad (Sf)_n = \int_X f g_n \, d\mu.$$

Dann liegt $Sf$ wirklich in $c_0$ (sogar in $\ell^2$), und $S$ ist linear und stetig mit Norm 1.
IV.Wähle $h_n \in C(X)$ mit $\|h_n - g_n\|_2 \leq 1/2$.
Da $g_n(X) \subset [-1,1]$ können wir $h_n(X) \subset [-1,1]$ annehmen.
Es folgt

$$1 - \int\limits_X h_n g_n d\mu = \int\limits_X g_n^2 d\mu - \int\limits_X h_n g_n d\mu \leq \|g_n - h_n\|_2 \cdot \|g_n\|_2 \leq 1/2.$$

Für $f_n := 1/2(\mathbf{1} + h_n)$ folgt

$$(Sf_n)_n = \int\limits_X f_n g_n d\mu \geq 1/4.$$

Beachte auch $f_n(X) \subset [0,1]$.
V. Setze für $i \in \mathbb{N}$ $Y_i := X_{2^{i+1}-1}$ und wähle zu $Y_i$ eine offene Umgebung $U_i$ mit $U_i \cap X_{2^{i+1}} = \emptyset$.
Da für $k \geq 2$ $X_{2^{i+k}-1} \subset X_{2^{i+k-1}} \subset \cdots \subset X_{2^{i+1}}$ und $X_{2^{i+1}} \cap X_{2^{i+1}-1} = \emptyset$ existieren solche $U_i$, und die $U_i$ sowie die $Y_i$ sind paarweise disjunkt.
Jedes $Y_i$ enthält unendlich viele $y_n$, ist also auch nicht folgenkompakt.

Führe für jedes $Y_i$ Konstruktion I-IV durch.

Seien $S_i, f_{in}$ die zu $Y_i$ gehörigen Operatoren $S$ und Funktionen $f_n$ aus IV.
Setze die $f_{in}$ nach Tietzes Erweiterungslemma zu stetigen Funktionen $f_{in}^0$ auf $X$ fort mit $f_{in}^0(X) \subset [0,1]$.
VI. Setze $S : C(X) \to c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ mit

$$(Sf)_{ij} = 1/i \left( \left( S_i f_{|Y_i} \right)_j \right).$$

$S$ ist linear und stetig mit Norm 1.
$Sf$ liegt wirklich in $c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:
Für $\varepsilon > 0, i > \|f\|/\varepsilon$ ist
$|(Sf)_{ij}| < \varepsilon$, und für festes $i$ ist $((Sf)_{ij})_{j=1}^\infty$ eine Nullfolge.
Zeige, dass $S$ als Operator nach $c(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ nicht regulär ist:
Wähle nach dem Satz von Urysohn zu $Y_i$ $h_i \in C(X)$ mit
$h_i(Y_i) = \{1\}, h_i(X \setminus U_i) = \{0\}, h_i(X) \subset [0,1]$.
Nehme an, es gebe $T \geq S, 0$. Dann folgt für $i, j \in \mathbb{N}$

$$Th_i \geq T(f_{ij}^0 \cdot h_i) \geq S(f_{ij}^0 \cdot h_i).$$

Da $f_{ij}^0 \cdot h_i = f_{ij}$ auf $Y_i$ folgt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$(Th_i)_{ij} \geq 1/i(S_i f_{ij})_j \geq 1/(4i),$$

also $\lim(Th_i) \geq 1/(4i)$.
Wegen $\mathbf{1} \geq h_1 + \cdots + h_n$ folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\lim(T\mathbf{1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i} \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Widerspruch. $\bigcirc$

# 2 Ordnungsbeschränkte und reguläre Operatoren

## 2.1 $L^b(E,F)$ und $L^r(E,F)$

Der Zusammenhang zwischen Ordnungsbeschräktheit und Regularität ist nicht nur auf Banachverbänden interessant, sondern auch auf allgemeinen Vektorverbänden. Daher sei diesen ein Abschnitt gewidmet.

Einige Aussagen folgen unmittelbar aus den vorherigen Kapiteln:

**2.1.1 Beispiel** *Sei $F = \{(x,y) \in \ell^\infty \times \ell^\infty : x - y \in c_0\}$. Dann ist $L^b(E,F) = L^r(E,F)$ für jeden Vektorverband $E$.*

*Beweis:* wörtlich wie bei 1.3.3. ○

Bekanntlich ist $F$ nicht Dedekindvollständig. Die Dedekindvollständigkeit von $F$ ist also auch hier nicht notwendig für die Allgemeingültigkeit von $L^b(E,F) = L^r(E,F)$.

**2.1.2 Beispiel** *Sei $F$ ein uniform vollständiger Vektorverband.
Dann ist $L^b(c,F) = L^r(c,F)$*

*Beweis:* Da $c$ eine Ordnungseins besitzt, liegt für einen ordnungsbeschränkten Operator $T : c \to F$ $T\mathrm{ball}(c)$ in einem Intervall, $T(c)$ also in einem Hauptideal von $F$. Ist $F$ uniform vollständig, so ist ein solches mit einer passenden Norm isomorph zu einem Raum $C(K)$.
Dann kann $T$ als stetiger Operator von $c$ nach $C(K)$ aufgefasst werden, nach 1.3.8 folgt die Regularität von $T$. ○

$c$ kann in 2.1.2 auch durch einige andere Vektorverbände ersetzt werden, vgl. 1.3.8, 1.3.8a

Ein interessantes Beispiel ist der Raum $\ell_0^\infty$ der auf dem Komplement einer endlichen Menge konstanten Folgen, der in Abramovich und Wickstead[4] ausführlich behandelt wird. Hieraus stammen auch die folgenden Sätze.

**2.1.3 Satz** *Für jeden Vektorverband $F$ gilt $L^b(\ell_0^\infty, F) = L^r(\ell_0^\infty, F)$*

*Beweis:* Sei $T \in L^b(\ell_0^\infty, F), y \in F_+$ mit $T[0, \mathbf{1}] \subset [-y, y]$.
Sei $E_n$ der von $\{e_1, \ldots, e_n\}$ erzeugte Unterraum von $\ell_0^\infty$ und $T_n = T_{|E_n}$.
Dann existiert $T_n^+$ und es ist $T_n^+ x = \sup T_n[0, x]$ für $x \in E_n^+, n \in \mathbb{N}$.
Da für $x \in E_n$ $T_{n+1}x = T_n x$, folgt $(T_{n+1}^+)_{|E_n} = T_n^+$, man erhält also einen positiven Operator $S$ auf dem Raum $\ell_0$ der abbrechenden Folgen durch $Sx = T_n^+ x$ für $x \in E_n$.
Setzt man nun noch $S\mathbf{1} = 3y$, erhält man einen linearen Operator auf $\ell_0^\infty$.
Wir zeigen: $S \geq T, 0$.
Sei $x \geq 0$. Ist $x \in \ell_0$, so ist für ein $n$ $Sx \geq T_n x = Tx$ und $Sx \geq 0$.
Für $x \notin \ell_0$ ist $x = c(\mathbf{1} + x_0)$ mit $c > 0,\ x_0 \in \ell_0,\ x_0 \geq -\mathbf{1}$, also $x_0^- \in [0, \mathbf{1}]$.
Es folgt $T[0, x_0^-] \subset [-y, y]$ und damit $S(x_0^-) \leq y$.
Nun ergibt sich

$$Sx = c \cdot (3y + Sx_0^+ - Sx_0^-) \geq c \cdot (3y - y) \geq 0$$

und

$$(S - T)x = c(3y - T\mathbf{1} + Sx_0^+ - Sx_0^- + Tx_0)$$

$$\geq c(3y - y + 0 - y - y) = 0.$$

Damit ist $T$ regulär. ○

Auch ordnungsbeschränkte Operatoren nach $\ell_0^\infty$ sind oft regulär:

**2.1.4 Beispiel** *Für jeden uniform vollständigen Vektorverband $E$ ist $L^b(E, \ell_0^\infty) = L^r(E, \ell_0^\infty)$.*

*Beweis:* Sei $T \in L^b(E, \ell_0^\infty), x \in E^+$.Nach 0.1 reicht es, die Existenz von $\sup T[0, x]$ zu zeigen.
Sei hierzu $T_x$ die Einschränkung von $T$ auf $E_x$. $E_x$ ist mit geeigneter Norm ein Banachverband, und $T_x$ ist stetig, wenn man $\ell_0^\infty$ mit der Supremumnorm versieht.
Sei weiter

$$F_n = \operatorname{span}\{\mathbf{1}, e_1, \ldots, e_n\} \subset \ell_0^\infty \quad \text{und} \quad E_n = T_x^{-1}(F_n).$$

Dann ist $E_n$ abgeschlossener Unterraum von $E_x$ und $E_x = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz enthält ein $E_n$ eine Kugel in $E_x$. Da $E_n$ ein Vektorraum ist, folgt $E_n = E_x$, also ist $T_x(E_x) \subset F_n$ endlichdimensional. Dann existiert $\sup T_x[0, x] = \sup T[0, x]$. ○

Die uniforme Vollständigkeit von $E$ ist aber nicht notwendig:

**2.1.5 Beispiel** *Sei $E_L$ der Vektorverband der Lipschitz-stetigen Funktionen auf $[0, 1]$.*
*Dann ist $L^b(E_L, \ell_0^\infty) = L^r(E_L, \ell_0^\infty)$.*

*Beweis:* $E_L$ ist nicht uniform vollständig:Es sind nicht alle stetigen Funktionen Lipschitzstetig, etwa $x \to \sqrt{x}$ nicht. Andererseits erfüllt $E_L$ die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß, ist also echter dichter Unterraum von $C[0, 1]$ und daher nicht vollständig bezüglich $\|.\|_\infty$. $\|.\|_\infty$ ist aber die zu **1** gehörige Hauptidealnorm.
$E_L$ lässt sich daher nicht zu einem Banachverband machen, wohl aber zu einem Banachraum mit der Norm

$$\|.\|_L : \|f\|_L = \|f\|_\infty + L(f),$$

wobei $L(f)$ das Infimum aller Lipschitzkonstanten von $f$ ist. Es ist klar, dass $\|.\|_L$ eine Norm auf $E_L$ ist, und dass eine $\|.\|_L$-Cauchyfolge in $E_L$ wieder gegen eine Lipschitz-stetige Funktion konvergiert.
Ist $T : E_L \to \ell_0^\infty$ ordnungsbeschränkt, so ist $T$ bezüglich $\|.\|_\infty$ und daher auch bezüglich $\|.\|_L$ stetig.Wie beim Beweis von 2.1.4 zeigt man, dass $T(E_L)$ endlichdimensional ist und für $f \geq 0$ stets $\sup T[0, f]$ existiert.Mit 0.1 folgt wieder die Regularität von $T$. ○

Es sind aber nicht immer alle ordnungsbeschränkten Operatoren nach $\ell_0^\infty$ regulär:

**2.1.6 Beispiel:** *Es gibt einen Vektorverband $E_K$ mit $L^b(E_K, \ell_0^\infty) \neq L^r(E_K, \ell_0^\infty)$*

*Beweis:* Das hier konstruierte Gegenbeispiel ist eine Variante von 1.3.1(und 1.3.6):
Sei $E_K$ der Raum aller beschränkten Doppelfolgen $(x_{nm})_{n,m=1}^\infty$ mit folgenden

Eigenschaften:

(i) $\exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{mit } x_{nm} = c$ für $n \geq n_0$(und alle $m$).

(ii) Für $n < n_0$ ist $(x_{nm})_{m=1}^{\infty} \in \ell_0^{\infty}$.

$E_K$ ist offensichtlich ein Vektorverband mit der punktweisen Ordnung.
Setze

$$T : E_K \to \ell_0^{\infty}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \text{ mit } (Tx)_{nm} = x_{n,2m-1} - x_{n,2m}$$

Für $x \in E_K$ liegt $Tx$ wirklich in $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:
Ist $n \geq n_0$, so ist stets $x_{n,2m-1} = x_{n,2m}$, für $n < n_0$ und hinreichend großes $m$ ebenfalls. Es ist also $(Tx)_{nm}$ nur endlich oft ungleich Null.
$T$ ist auch linear und stetig mit Norm 2, wenn man beiden Räumen die sup-Norm gibt. Da $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ eine Ordnungseins besitzt, folgt dass $T$ ordnungsbeschränkt ist.
Zeige, dass $T$ nicht regulär ist.
Nehme an, es existiere $S \geq T, 0$.Sei $\mathbf{1}^{(n)} \in E_K$ mit $\mathbf{1}_{nm}^{(n)} = 1$ und $\mathbf{1}_{km}^{(n)} = 0$ für $k \neq n$.
Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist nun

$$S\mathbf{1}^{(n)} \geq Se_{n,2m-1} \geq Te_{n,2m-1} = e_{nm},$$

also $(S\mathbf{1}^{(n)})_{nm} \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit

$$S\mathbf{1}^{(n)} \geq 1 \text{ auf dem Komplement einer endlichen Menge.}$$

Wegen $\mathbf{1} \geq \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}^{(n)}$ folgt $S\mathbf{1} \geq k$ auf dem Komplement einer endlichen Menge für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $S\mathbf{1}$ nicht unbeschränkt sein kann, folgt ein Widerspruch.
Es ist also $L^b(E_K, \ell_0^{\infty}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})) \neq L^r(E_K, \ell_0^{\infty}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ und damit auch $L^b(E_K, \ell_0^{\infty}) \neq L^r(E_K, \ell_0^{\infty})$. ○

## 2.2 $\mathcal{L}^b(E, F)$ und $\mathcal{L}^r(E, F)$

Die Beziehung zwischen ordnungsbeschränkten und regulären Operatoren auf Banachverbänden fällt in vielen Fällen unter die vorigen Kapitel. Ist der Bildraum $F$ Dedekindvollständig, beantwortet Satz 0.1 alle Fragen; bestizt $F$ eine Ordnungseins,so sind alle stetigen Operatoren nach $F$ ordnungsbeschränkt, und die Frage nach $\mathcal{L}^b(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$ gehört nach Kapitel 1.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Bildräumen, die keine der beiden Eigenschaften besitzen. So kommen sämtliche klassischen Verbände $\ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty), c, c_0, C(X)$ oder $L^p$ als Bildräume nicht in Frage;wir betrachten hier vielmehr Unterräume derselben sowie daraus zusammengesetzte Räume.
Wir beginnen mit einer einfachen Feststellung:

**2.2.1 Satz** *Sind $E, F, G$ Banachverbände mit $\mathcal{L}^b(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ und $\mathcal{L}^b(E,G) = \mathcal{L}^r(E,G)$, so ist $\mathcal{L}^b(E, F \oplus G) = \mathcal{L}^r(E, F \oplus G)$.*

*Beweis:* Für $T \in \mathcal{L}^b(E, F \oplus G)$ kann man $S \geq T, 0$ komponentenweise definieren. ○

Ebebnso einfach ist die duale Feststellung:

**2.2.2 Satz** *Ist für Banachverbände $E, F, G$ $\mathcal{L}^b(E,G) = \mathcal{L}^r(E,G)$ und $\mathcal{L}^b(F,G) = \mathcal{L}^r(F,G)$, so gilt auch $\mathcal{L}^b(E \oplus F, G) = \mathcal{L}^r(E \oplus F, G)$.*

*Beweis:* Für $T \in \mathcal{L}^b(E \oplus F, G)$ sei $T_1 : E \to G$ mit $T_1 x = T(x, 0)$ und $T_2 : F \to G$ mit $T_2 x = T(0, x)$. Dann sind $T_1, T_2$ ordnungsbeschränkt, und es existieren $S_i \geq T_i, 0$. Setze nun $S : E \oplus F \to G$ mit $S(x, y) = S_1 x + S_2 y$. Dann ist $S \geq T, 0$. ○

Als drittes Beispiel für Aussagen über die Summe zweier Banachverbände folgt eine Verallgemeinerung von 1.3.3:

**2.2.3 Satz** *Seien $E, F$ Banachverbände, $G$ sei ein abgeschlossenes Ideal in $F$. Dann ist*

$$H := \{(x, y) \in F \oplus F : x - y \in G\}$$

*ein Banachverband.*
*Ist $\mathcal{L}^b(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$, so folgt $\mathcal{L}^b(E,H) = \mathcal{L}^r(E,H)$.*

*Beweis:* folgt wie in 1.3.3. ○

Durch Summenbildung erhält man auch Banachverbände $E, F$ mit
$\mathcal{L}(E,F) \neq \mathcal{L}^b(E,F) \neq \mathcal{L}^r(E,F)$:

**2.2.4 Beispiel** Betrachte die Banachverbände $C[0,1]$ und $c_0 \oplus C[0,1]$.
Es gibt einen stetigen, nicht ordnungsbeschränkten Operator $S : C[0,1] \to c_0$.
Setze z.B. $(Sf)_n = f(1/n) - f(0)$. Da $f$ stetig, liegt $Sf$ in $c_0$, und $S$ ist linear und stetig mit Norm 2.
Ist allerdings für $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C[0,1]$ mit $f_n(t) = \min\{1, nt\}$, so ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ordnungsbeschränkt in $C[0,1]$, aber $\{Sf_n : n \in \mathbb{N}\}$ hat keine obere Schranke in $c_0$.
Ebenso gibt es einen ordnungsbeschränkten , nicht regulären Operator $T : C[0,1] \to C[0,1]$. Einen solchen erhält man durch Translation aus dem Operator in 1.3.2.
Da auf der direkten Summe die Ordnung komponentenweise definiert ist, ist nun klar, dass

$$\tilde{S} : C[0,1] \to c_0 \oplus C[0,1] \text{ mit } \tilde{S}f = (Sf, 0)$$

stetig und nicht ordnungsbeschränkt ist sowie

$$\tilde{T} : C[0,1] \to c_0 \oplus C[0,1] \text{ mit } \tilde{T}f = (0, Tf)$$

ordnungsbeschränkt, aber nicht regulär.
Es folgt
$\mathcal{L}(C[0,1], c_0 \oplus C[0,1]) \neq \mathcal{L}^b(C[0,1], c_0 \oplus C[0,1]) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], c_0 \oplus C[0,1])$.○

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Unterverbände der klassischen Verbände zu betrachten. Da nach einem Satz von Kakutani alle Banachverbände mit $p$-additiver Norm (und damit alle abgeschlossenen Unterverbände von $L^p$- und $\ell^p$-Räumen) für $1 \leq p < \infty$ wieder verbandsisomorph zu $L^p(\mu)$-Räumen sind, kommen wir bei diesen Räumen auf keine neuen Ergebnisse.
Bleiben Unterräume von M-Räumen. Hier kann sich wieder die Situation aus 2.2.4 ergeben:

**2.2.5 Beispiel** *Sei* $F = \{f \in C[0,1], f(0) = 0\}$.
*$F$ ist ein abgeschlossener Unterverband von $C[0,1]$, also ein Banachverband, und es gilt*

$$\mathcal{L}(C[0,1], F) \neq \mathcal{L}^b(C[0,1], F) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], F).$$

*Beweis:* Sei $S : C[0,1] \to F$ mit $Sf(t) = f(t) - f(0)$.
Analog zu 2.2.4 sieht man, dass $S$ stetig und nicht ordnungsbeschränkt ist.
Aus 1.3.2 erhält man wieder einen Operator $U : C[0,1] \to C[1/2,1]$, so dass

$U$ ordnungsbeschränkt und nicht regulär ist.
Sei nun $T : C[0,1] \to F$ mit

$$Tf(t) = Uf(t) \text{ für } t \geq 1/2 \quad \text{und } Tf(t) = 2t \cdot Uf(1/2) \text{ für } t < 1/2.$$

Dann ist $Tf \in F$,und $T$ ist ein linearer Operator mit $\|T\| = \|U\|$ . $T$ ist auch ordnungsbeschränkt:
Sei zu $f \in C[0,1]$ $g \in C[1/2,1]$ mit $U[-f,f] \subset [-g,g]$, so setze $g$ auf $[0,1]$ fort durch $g(t) = 2t \cdot g(1/2)$ für $g \in [0,1/2)$. Dann ergibt sich
$T[-f,f] \subset [-g,g]$.
$T$ kann aber nicht regulär sein, denn hätte man $V \geq T, 0$, so wäre
$\tilde{V} : C[0,1] \to C[1/2,1]$ mit $\tilde{V}f(t) = Vf(t)$ für $t \in [1/2,1]$ eine obere Schranke von $U$ und 0. ○

Der dritte Typ von Banachverbänden, die hier vorgestellt werden, sind Räume von Vektorfolgen $E[F]$. Diese Räume $E[F]$ sind definiert, wenn $E$ ein Raum $\ell^p; 1 \leq p \leq \infty, c_0$ oder $c$ ist und $F$ ein beliebiger Banachverband. Ist $E = \ell^p$ oder $c_0$, so ist auch $E[F_n]_{n=1}^{\infty}$ für eine Folge von Banachverbänden $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert.

**2.2.6 Satz** *Seien $F, G$ Banachverbände, so dass $F[G]$ definiert ist.*
*Für einen Banachverband E gelten:*
(i) *Ist $\mathcal{L}(E, F[G]) = \mathcal{L}^b(E, F[G])$, so ist auch*
$\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^b(E,F)$ *und* $\mathcal{L}(E,G) = \mathcal{L}^b(E,G)$.
(ii) *Ist $\mathcal{L}^b(E, F[G]) = \mathcal{L}^r(E, F[G])$, so ist auch*
$\mathcal{L}^b(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ *und* $\mathcal{L}^b(E,G) = \mathcal{L}^r(E,G)$.

*Beweis:* I. Für $T \in \mathcal{L}(E,G)$ sei $\tilde{T} : E \to F[G]$ mit $(\tilde{T}x)_1 = Tx$ und $(\tilde{T}x)_n = 0$ für $n > 1$. Ist $\tilde{T}$ ordnungsbeschränkt, so ist offensichtlich auch $T$ ordnungsbeschränkt. Ist $\tilde{S} \geq \tilde{T}, 0$, so setze $S : E \to F$ mit $Sx = (\tilde{S}x)_1$.Dann ist $S \geq T, 0$.
II. Wir können den Trivialfall $G = 0$ ausschließen.Wähle $0 \neq y' \in G'_+$ und $y \in G_+$ mit $\langle y', y \rangle = 1$.
Ist nun $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so setze

$$\tilde{T} : E \to F[G] \text{ mit } (\tilde{T}x)_n = (Tx)_n \cdot y.$$

Ist $\tilde{T}$ ordnungsbeschränkt, so existiert zu $x \in E_+$ $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in F[G]$, so dass für $z \in [-x,x]$ stets $(Tz)_n \in [-a_n, a_n]$.

Da alle $(Tz)_n$ Vielfache von $y$ sind, kann man $a$ so wählen, dass $a_n = \lambda_n y$.
Wegen $a \in F[G]$ folgt $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in F$.
Nun folgt aber $(|Tz|)_n \leq \lambda_n$, also ist $T$ ordnungsbeschränkt.
Ist $\tilde{T}$ regulär, so existiert $\tilde{S} \geq \tilde{T}, 0$.
Setze

$$S : E \to F \text{ mit } (Sx)_n = \langle y', (\tilde{S}x)_n \rangle.$$

Dann folgt für $x \geq 0$ $(Sx)_n \geq \langle y', (\tilde{T}x)_n \rangle = (Tx)_n \langle y', y \rangle = (Tx)_n$ Wegen $y' \geq 0$ ist ebenfalls $S \geq 0$. Damit ist $T$ regulär. ○

Aus diesem Satz folgt wiederum ein Beispiel analog zu 2.2.4:

**2.2.7 Beispiel**

$$\mathcal{L}(C[0,1], c_0[C[0,1]]) \neq \mathcal{L}^b(C[0,1], c_0[C[0,1]]) \neq \mathcal{L}^r(C[0,1], c_0[C[0,1]]).$$

*Beweis:* Die Aussage folgt sofort aus 2.2.6. ○

## 2.3 Approximation durch reguläre Operatoren. Die b-Norm

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wie "groß" der Raum $\mathcal{L}^r(E,F)$ im Vergleich zu $\mathcal{L}(E,F)$ und $\mathcal{L}^b(E,F)$ ist, d.h. ob $\mathcal{L}^r(E,F)$ in diesen Räumen dicht liegt oder abgeschlossen ist. Es wird anhand einiger Beispiele aufgezeigt, welche Situationen auftreten können. Zudem wird noch eine Norm auf $\mathcal{L}^b(E,F)$ vorgestellt, die diesen Raum stets zu einem Banachraum macht. Die Frage, welche Situationen hier bezüglich der Größe von $\mathcal{L}^r(E,F)$ auftreten können, ist indes noch ein offenes Problem.
Der Abschnitt folgt Wickstead[14].

**2.3.1 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$, so dass $\mathcal{L}^r(E,F)$ ein echter dichter Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$ ist.*

*Beweis:* Wähle $E = \ell^2, F = \ell^1$. Nach 1.1.13 ist $\mathcal{L}(E,F) \neq \mathcal{L}^r(E,F)$.
Andererseits ist nach einem Satz von Pitts (siehe [18],2.c.3) jeder stetige lineare Operator $T$ von $\ell^2$ nach $\ell^1$ kompakt.Setzt man $T_n : E \to F$ mit $(T_n x)_m = (Tx)_m$ für $m \leq n$ und $(T_n x)_m = 0$ für $m > n$, so folgt $\|T - T_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Da $T_n(E)$ endlichdimensional,sind die $T_n$ regulär. Es folgt die Behauptung. ○

**2.3.2 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$, so dass $\mathcal{L}^r(E,F)$ ein echter abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$ ist.*

*Beweis:* Wähle $E = L^1(0,1), F = c_0$. Dann ist $\mathcal{L}(E,F) \neq \mathcal{L}^r(E,F)$. Siehe z.B 2.1.1. Ist nun $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$, so existiert nach 0.1 $|T|$. Fasst man $T$ als Operator nach $F'' = \ell^\infty$ auf, so ergibt sich nach 1.1.3 $\||T|\| = \|T\|$, also $\|T\|_r = \|T\|$. Nun ist $\mathcal{L}^r(E,F)$ aber mit der r-Norm vollständig; da die r-Norm hier mit der Operatornorm übereinstimmt, muss $\mathcal{L}^r(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$ abgeschlossen sein. ○

**2.3.3 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$, so dass $\mathcal{L}^r(E,F)$ weder dicht noch abgeschlossen in $\mathcal{L}(E,F)$ liegt.*

*Beweis:* Ein Beispiel wäre $E = L^1(0,1) \oplus \ell^2, F = c_0 \oplus \ell^1$. Dies folgt sofort aus 2.3.1 und 2.3.2. Wir wollen aber noch ein Beispiel betrachten, in dem $F$ eine Ordnungseins besitzt.Dann haben wir nämlich auch einen Fall, in dem $\mathcal{L}^r(E,F)$ weder dicht noch abgeschlossen in $\mathcal{L}^b(E,F)$ ist.
Die Konstruktion dieses Beispiels ist allerdings etwas länger als bei den vorigen.
I.Konstruiere zu $n \in \mathbb{N}$ einen Operator $T : c^n \to c$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\|T\| = 2, \|T\|_r \geq n, \text{ für } 0 < \alpha < 1 \text{ und } \|U - T\| < \alpha \text{ folgt } \|U\|_r \geq n(1-\alpha)$$

für alle $U \in \mathcal{L}(c^n, c)$. Beachte, dass nach 1.3.8 alle stetigen Operatoren von $c^n$ nach $c$ regulär sind.
Sei $Q : c^n \to c_0^n$ mit

$$(Qx)_i^{(j)} = x_i^{(j)} - \lim_{i\to\infty} x_i^{(j)} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n.$$

Setze nun $T : c^n \to c$ mit $(Tx)_{(i-1)n+j} = (Qx)_i^{(j)}$. Dann liegt $Tx$ wirklich in $c$ (sogar in $c_0$), und $T$ ist linear und stetig mit Norm 2. Sei nun $S \geq T, 0$. Ist $\mathbf{1}_j \in c^n$ mit $(\mathbf{1}_j)_i^{(j)} = 1$ und $(\mathbf{1}_j)_i^{(k)} = 0$ für $k \neq j$, so folgt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$S\mathbf{1}_j \geq Se_i^{(j)} \geq Te_i^{(j)} = e_{(i-1)n+j},$$

also $(S\mathbf{1}_j)_i = 1$ unendlich oft und daher $\lim(S\mathbf{1}_j) \geq 1$.
Es folgt $\lim(S\mathbf{1}) \geq n$ und damit $\|T\|_r \geq n$.
Sei nun $0 < \alpha < 1$ und $U \in \mathcal{L}(c^n, c)$ mit $\|T - U\| \leq \alpha$. Betrachtet man

nun $T, U$ als Operatoren nach $\ell^\infty$, so erhält man mit der Riesz-Kantorovich-Formel leicht $(T^+x)_{(i-1)n+j} = x_i^{(j)}$ und außerdem $\|(T-U)^+\| \leq \||T-U|\| \leq \alpha$ nach 1.1.3. Es folgt

$$(U^+\mathbf{1}_j)_{(i-1)n+j} \geq (T^+\mathbf{1}_j)_{(i-1)n+j} - ((U-T)^+\mathbf{1}_j)_{(i-1)n+j} \geq 1-\alpha.$$

Für einen Operator $V : c^n \to c$ mit $V \geq U, 0$ ist $V \geq U^+$ als Operator nach $\ell^\infty$, es folgt $(V\mathbf{1}_j)_i \geq 1-\alpha$ unendlich oft, also $\lim(V\mathbf{1}_j) \geq 1-\alpha$ und damit $\lim(V\mathbf{1}) \geq n(1-\alpha)$. Damit ergibt sich $\|U\|_r \geq n(1-\alpha)$.
II. Sei nun $E = \ell^\infty[c^n]_{n=1}^\infty$ und $F = \ell^\infty[c]$. Bezeichne den zu $n \in \mathbb{N}$ gehörigen Operator $T$ aus I. mit $T_n$.
Setze $V : E \to F$ mit $(Vx)_n = T_n x_n$. Dann kann $V$ nicht regulär sein, sonst wäre $\|V\|_r \geq \|T_n\|_r \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Allerdings ist $V$ stetig mit $\|V\| = 2$.
Nehme nun an, es existiere $U \in \mathcal{L}^r(E,F)$ mit $\|U-V\| \leq \alpha$ für ein $0 < \alpha < 1$.
Bezeichne die Einschränkung von $U$ auf $c^n$ mit $U_n$ und die Projektion von $\ell^\infty[c]$ auf die $n$-te Komponente mit $P_n$.
Es folgt:$P_n U_n$ operiert von $c^n$ nach $c$ und

$$\|P_n U_n - T_n\| \leq \|P_n(U-V)\| \leq \|U-V\| \leq \alpha.$$

Mit I. folgt nun $\|U_n\|_r \geq \|P_n U_n\|_r \geq n(1-\alpha)$ und damit

$$\|U\|_r \geq \|U_n\|_r \geq n(1-\alpha) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\alpha < 1$ ergibt sich ein Widerspruch.
II. zeigt, dass $\mathcal{L}^r(E,F)$ nicht dicht in $\mathcal{L}(E,F)$ liegt. Zudem hat man für alle $n \in \mathbb{N}$ $\|T_n\|_r \geq n/2\|T_n\|$,die Operatornorm und die r-Norm sind also nicht äquivalent. Damit kann $\mathcal{L}^r(E,F)$ mit der Operatornorm kein Banachraum sein, ist also nicht abgeschlossen in $\mathcal{L}(E,F)$. ○

Nun ist es wünschenswert, diese Approximationsfrage auch in $\mathcal{L}^b(E,F)$ zu behandeln. Dies stößt aber auf ein grundsätzliches Problem. Es gilt nämlich:

**2.3.4 Satz** *$\mathcal{L}^b(E,F)$ ist mit der gewöhnlichen Operatornorm im allgemeinen kein Banachraum.*

*Beweis:* Wähle wieder $E = \ell^2, F = \ell^1$. Da $\ell^1$ Dedekindvollständig, ist $\mathcal{L}^b(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$. Nach 2.3.2 ist $\mathcal{L}^b(E,F)$ echter dichter Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$, kann also selbst kein Banachraum mit $\|.\|$ sein. ○

Um die Frage bezüglich $\mathcal{L}^r(E,F)$ und $\mathcal{L}^b(E,F)$ zu untersuchen, brauchen wir also zunächst eine andere Norm:

**2.3.5 Satz und Definition** (i) *Sei $T \in \mathcal{L}^b(E,F)$. Dann existiert $M > 0$, so dass für alle $x \in E_+$ $y \in F_+$ existiert mit*
*$\|y\| \leq M\|x\|$ und $T[-x,x] \subset [-y,y]$.*
(ii) *Sei zu $T \in \mathcal{L}^b(E,F)$ $\|T\|_b$ das Infimum über alle $M$ aus (i).*
*Dann ist $\|.\|_b$ eine Norm auf $\mathcal{L}^b(E,F)$, und $\mathcal{L}^b(E,F)$ ist mit dieser Norm ein Banachraum.*

*Beweis:* (i) Angenommen, $T$ sei ordnungsbeschränkt und es existiere nicht so ein $M$.
Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \operatorname{ball}(E)_+$, so dass aus $T[-x_n, x_n] \subset [-y,y]$ stets $\|y\| > n^3$ folgt.
Setze nun

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n.$$

$x$ existiert, da die Summe absolut konvergiert.
Sei $y \in F_+$ mit $T[-x,x] \subset [-y,y]$. Es folgt $T[-x_n/n^2, x_n/n^2] \subset [-y,y]$ und damit $\|y\| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch.
(ii) Die Normeigenschaften sind unmittelbar klar. Beachte auch $\|T\|_b \geq \|T\|$.
Sei nun $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ eine $\|.\|_b$-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^b(E,F)$. Wegen $\|.\| \leq \|.\|_b$ existiert $T = \lim_{n\to\infty} T_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Zeige, dass $T$ ordnungsbeschränkt ist.
Wähle eine Teilfolge $(T_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(T_n)$ mit $\|T_{n_k} - T_m\|_b \leq k^{-2}$ für alle $m \geq n_k$.
Dann existiert zu $x \in E_+$ $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset F_+$ mit

$$T_{n_1}[-x,x] \subset [-y_1,y_1]\ ,\ (T_{n_k} - T_{n_{k-1}})[-x,x] \subset [-y_k,y_k] \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty,$$

also $y := \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ existiert. Dann ist $T_{n_k}[-x,x] \subset [-y,y]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$T[-x,x] \subset [-y,y] + \varepsilon \operatorname{ball}(F)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Da $y$ von $\varepsilon$ unabhängig, folgt $T[-x,x] \subset [-y,y]$. ○

Die Frage, ob es für $\mathcal{L}^b(E,F)$ und die b-Norm Beispiele analog zu 2.3.1-2.3.3 gibt, ist noch weitgehend offen. Lediglich Beispiel 2.3.3 gilt auch in diesem Fall. Denn sind $E$ und $F$ M-Räume mit Ordnungseins, so stimmt die b-Norm mit der gewöhnlichen Operatornorm überein. Dies folgt sofort aus der Definition von $\|.\|_b$.

# 3 Die Ordnungsstruktur von $L^r(E,F)$ und $\mathcal{L}^r(E,F)$

Wenn $T$ ein regulärer Operator ist, so existiert eine obere Schranke von $T$ und $-T$. Die Existenz einer *kleinsten* oberen Schranke, also von $|T|$, ist nicht gesichert. Wir wollen untersuchen, auf welchen Räumen $|T|$ stets existiert, die regulären Operatoren also einen Verband bilden. Insbesondere zeigen wir eine diesbezügliche Umkehrung des Satzes von Riesz-Kantorovich für Vektorverbände sowie für Banachverbände.
Zunächst wieder ein Gegenbeispiel aus [2]:

**3.1 Beispiel** *$\mathcal{L}^r(c,c)$ bildet keinen Vektorverband.*
*Beweis:* Sei $T : c \to c$ mit $(Tx)_{2n-1} = x_{2n-1} - x_{2n}$ und $(Tx)_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ . Für $x \in c$ konvergiert $x_{n-1} - x_n$ gegen 0; $Tx$ liegt also in $c$. Weiter ist $T$ stetig mit Norm 2,nach Satz 1.3.8 also regulär.
Nehme nun an, es existiere $|T|$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $S_n : c \to c$ mit $(S_n x)_m = (|T|x)_m$ für $m \neq 2n$ und $(S_n x)_{2n} = 0$ . Dann ist $\pm T \leq S_n \leq |T|$, da $(Tx)_{2n} = 0$ für alle $x \in c$, es folgt $|T| = S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das bedeutet $(|T|x)_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ . Nun ist aber andererseits $(|T|\mathbf{1})_{2n+1} \geq (Te_{2n+1})_{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ , d.h. $|T|\mathbf{1}$ ist unendlich oft sowohl 0 als auch $\geq 1$, liegt also nicht in $c$. Widerspruch. ○

Nun zu den angekündigten Sätzen: Der Satz für Vektorverbände stammt aus [9].

**3.2.Satz (Abramovich-Gejler)** *Sei $F$ ein Vektorverband, so dass $L^r(E,F)$ für jeden Vektorverband $E$ einen Vektorverband bildet. Dann ist $F$ Dedekind-vollständig.*
*Beweis:* Sei $A \subset F$ ordnungsbeschränkt, oBdA sei $A \subset F_+$. Ist $A$ endlich, so hat $A$ ein Supremum. Sei $A$ unendlich.
Für $M \subset A$ sei $\ell_M$ der von $\mathbf{1}$ und $\{e_a : a \in M\}$ erzeugte (algebraische) Unterraum von $\ell^\infty(A)$. Da $A$ unendlich, bilden diese Vektoren stets eine Basis von $\ell_M$ ; und $\ell_M$ ist ein Unterverband von $\ell^\infty(A)$.
Betrachte das System $\mathcal{M}$ aller Tupel $(M, T_M)$ mit folgenden Eigenschaften:

$M \subset A$, $\sup(M)$ existiert , $T_M \in L^r(\ell_M, F)$, $T_M e_a \geq 0 \; \forall a \in M$,
$T_M \mathbf{1} = 0$, $T_M^+ \mathbf{1} = \sup(M)$.

Besteht $M$ nur aus einem Element, so erfüllt $T$ mit $Te_a = a$, $T\mathbf{1} = 0$ diese Bedingungen, $\mathcal{M}$ ist also nichtleer.
Sei $(M_1, T_{M_1}) \leq (M_2, T_{M_2}) \iff M_1 \subset M_2$ und $T_{M_2}$ ist Fortsetzung von $T_{M_1}$.
Betrachte eine $\leq$-Kette $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}$.
Für $M_0 = \bigcup\{M : (M, T_M) \in \mathcal{K}\}$ ist $T_0 : \ell_{M_0} \to F$ mit $T_0 x = T_M x$ für $x \in \ell_M$ wohldefiniert.
Ist nun $S : \ell_{M_0} \to F$ mit $S \geq T_0, 0$ , so ist $S_{|\ell_M} \geq T_M^+$ ,also $S\mathbf{1} \geq \sup(M)$ für alle $(M, T_M) \in \mathcal{K}$ ,damit ist $S\mathbf{1}$ eine obere Schranke von $M_0$.
Ist umgekehrt $y$ eine obere Schranke von $M_0$, so setze $S : \ell_{M_0} \to F$ mit $S\mathbf{1} = y, Se_a = T_M e_a$ für $a \in M$. Sei $x \in \ell_{M_0}^+$ . Dann ist $x = c\mathbf{1} + \sum_{a \in J} c_a e_a$ mit $J \subset M$ endlich für ein $M$, $c \geq 0, c_a \geq -c$. Es folgt

$$Sx = cy + \sum_{a \in J} c_a T_M e_a \geq c \cdot \left( y - \sum_{a \in J} T_M e_a \right) \geq c(y - T_M^+ \mathbf{1}) \geq 0$$

und

$$(S - T_0)x = cy + \sum_{a \in J} c_a T_M e_a - \sum_{a \in J} c_a T_M e_a \geq 0,$$

also $S \geq T_0, 0$. Insbesondere ist $T_0$ regulär,also existiert $T_0^+$, und für eine obere Schranke $y$ von $M_0$ ist $y = S\mathbf{1} \geq T_0^+\mathbf{1}$ für einen Operator $S$. Da $T_0^+\mathbf{1}$ auch obere Schranke von $M_0$ ist,folgt $T_0^+\mathbf{1} = \sup(M_0)$.Es folgt $(M_0, T_0) \in \mathcal{M}$.
Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element $(M, T_M)$. Zeige nun $M = A$.
Angenommen, es existiere $a \in A \setminus M$. Dann setze $M_a = M \cup \{a\}$ und $T_a : \ell_{M_a} \to F$
mit $T_a e_a = (a - \sup(M))^+, T_a x = T_M x$ für $x \in \ell_M$. $T_a$ ist regulär,und für eine obere Schranke $y$ von $M_a$ ist $T_a^+\mathbf{1} \leq y$ wie oben. Ebenso ist
$T_a^+\mathbf{1} \geq T_M^+\mathbf{1} = \sup(M)$.
Setze nun $S : \ell_M \to F$ mit $Se_k = T_M e_k, S\mathbf{1} = T_a^+(\mathbf{1} - e_a)$.
Es folgt für $x \in \ell_M^+, x = c\mathbf{1} + \sum_{k \in J} c_k e_k$ wie oben

$$Sx \geq c \left( T_a^+(\mathbf{1} - e_a) - \sum_{k \in J} T_M e_k \right) \geq c \cdot T_a^+ \left( \mathbf{1} - e_a - \sum_{k \in J} e_k \right) \geq 0$$

und

$$(S - T_M)x = c \cdot T_a^+(\mathbf{1} - e_a) \geq 0$$

Es folgt $S \geq T_M^+$,also $T_a^+\mathbf{1} \geq T_a e_a + T_M^+\mathbf{1} \geq a - \sup(M) + \sup(M) = a$.
Also ist $T_a^+\mathbf{1} = \sup(M_a)$ und damit
$(M_a, T_a) \in \mathcal{M}$,im Widerspruch zur Maximalität von $(M, T_M)$.
Es besitzt also $A$ ein Supremum,damit ist $F$ Dedekindvollständig. $\bigcirc$

Wir zeigen nun eine Banachverbandsversion des obigen Satzes.Diese wurde in Abramovich und Wickstead[5] bewiesen. Aus dem gleichen Artikel stammen auch die nachfolgenden Korollare.

**3.3 Satz** *Sei $F$ ein Banachverband,und $\mathcal{L}^r(E,F)$ sei für jeden Banachverband $E$ ein Vektorverband.Dann ist $F$ Dedekindvollständig.*

Für den Beweis benötigen wir noch einen Satz,der auch sonst nützlich ist. Er wurde zuerst bewiesen in [16].

**3.4 Satz(Veksler-Gejler)** *Sei $F$ ein uniform vollständiger Vektorverband.*
(i) *Besitzt jede disjunkte ordnungsbeschränkte Folge in $F$ ein Supremum,so ist $F$ $\sigma-$Dedekindvollständig.*
(ii) *Besitzt jede disjunkte ordnungsbeschränkte Teilmenge von $F$ ein Supremum, so ist $F$ Dedekindvollständig.*
*Beweis:* $F$ ist ($\sigma$-) Dedekindvollständig,wenn jedes Hauptideal von $F$ ($\sigma$-)Dedekindvollständig ist. Ein solches Hauptideal ist mit einer geeigneten Norm ein M-Raum mit Ordnungseins, also isomorph zu einem Raum $C(X)$ mit einem kompakten Hausdorffraum $X$. Man kann also $F = C(X)$ annehmen.
(i) Es ist zu zeigen, dass $X$ quasi-Stonesch ist. Sei hierzu $V$ offen in $X$ mit $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, F_n$ abgeschlossen.Da $X$ normal ist, existiert eine aufsteigende Folge offener Mengen $V_n \subset V$ mit $V_{n-1} \cup F_n \subset V_n \subset \bar{V_n} \subset V$ (sei $V_0 = \emptyset$).Da $F_n \subset V_n$ folgt $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V_n}$. Ist $V = \bar{V_n}$ für ein $n$, so ist $V$ abgeschlossen, also $\bar{V}$ offen,was zu zeigen war. Andernfalls kann man die $V_n$ paarweise verschieden wählen.
Wähle nach dem Satz von Urysohn Funktionen $f_n \in C(X)$ mit

$$f_n(X) \subset [0,1], f_n(\bar{V_n} \setminus V_n) = \{1\}, f_n(\overline{V_{n-2}}) = \{0\}, f_n(X \setminus V_{n-1}) = \{0\}$$

(Sei $V_{-1} = V_0 = \emptyset$).
Für $i = 0,1,2$ sind dann die Folgen $(f_{3n+i})_{n=0}^{\infty}$ paarweise disjunkt (und ordnungsbeschränkt durch 0 und $\mathbf{1}$).

Es existiert somit $g := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} = \sup_{0\le i\le 2}(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_{3n+i}\})$.Dann ist $g(V) = \{1\}, g(X \setminus \bar{V}) = \{0\}$. Da $g$ stetig ist, folgt $g(\bar{V}) = \{1\}$ , d.h. $\bar{V}$ muss offen und abgeschlossen sein.

(ii) Aus (i) folgt, dass $X$ quasi-Stonesch ist. Sei $V \subset X$ offen. Mit dem Zornschen Lemma sieht man, dass ein maximales System paarweise disjunkter offener und abgeschlossener Mengen $\mathcal{C}$ existiert mit $\bigcup\mathcal{C} \subset V$.
Dann liegt $\bigcup\mathcal{C}$ dicht in $V$. Denn wäre $x \in V \setminus \overline{\bigcup\mathcal{C}}$,hätte man eine offene Umgebung $U$ von $x$ mit $\bar{U} \cap \overline{\bigcup\mathcal{C}} = \emptyset$.
$U$ enthält aber eine offene $F_\sigma$-Menge: Wähle nach dem Satz von Urysohn eine stetige Funktion $f$ mit $f(X) \subset [0,1], f(x) = 1, f(X \setminus U) = \{0\}$.Dann ist $f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([1/n,1])$ eine offene $F_\sigma$-Menge in $U$. Somit enthält $\bar{U}$ eine offene und abgeschlossene nichtleere Teilmenge,im Widerspruch zur Maximalität von $C$.
Da jedes $G \in \mathcal{C}$ offen und abgeschlossen,ist $\mathbf{1}_G$ für $G \in \mathcal{C}$ stetig,und so existiert $g := \sup\{\mathbf{1}_G : G \in \mathcal{C}\}$ in $C(X)$. Wie in (i) folgt $g = \mathbf{1}_{\bar{V}}$ und damit die Behauptung. ○

*Beweis von 3.3:*
I.Zeige zunächst,dass $F$ $\sigma$-Dedekindvollständig ist.Sei hierzu $(a_n)_{n=1}^\infty \subset F_+$ eine disjunkte Folge mit oberer Schranke $y$.
Betrachte $T : L^1(0,1) \to F$ mit

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n; \quad c_n = \int_0^1 f(t) r_n(t) dt,$$

wobei $r_n$ die $n-$te Rademacherfunktion ist.
Die Reihe konvergiert normweise: Da die $a_n$ disjunkt und $\le y$ sind folgt für $M, N \to \infty$
$\left\| \sum_{n=N}^{M} c_n a_n \right\| \le \|y\| \cdot \max_{N\le n\le M} |c_n| \to 0$ , also ist die Cauchy-Bedingung erfüllt.
Ist $S \ge T, 0$ ,so ist $2S\mathbf{1} \ge a_n$ für alle $n$ (vgl.1.2.1). Definiere umgekehrt $S : L^1(0,1) \to F$ mit

$$Sf = \frac{1}{2}\left(Tf + y \cdot \int_0^1 f(t)\ dt\right)$$

Für $f \geq 0$ ist

$$\int_0^1 f(t)\ dt \geq \pm \int_0^1 f(t) r_n(t)\ dt$$

und $y \geq a_n$,also $Sf \geq 0$ und

$$(S-T)f = 1/2 \left( -Tf + y \int_0^1 f(t)\ dt \right) \geq 0,$$

also $S \geq T, 0$.Außerdem ist $2S\mathbf{1} \geq y$. Es ist nun $T$ regulär,folglich existiert $T^+$,und es ist $y \geq 2T^+\mathbf{1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $y$ beliebige obere Schranke war, folgt $2T^+\mathbf{1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
Mit dem Satz von Veksler-Gejler folgt die $\sigma$-Dedekindvollständigkeit.
II.Sei nun $A \subset F^+$ disjunkt mit oberer Schranke $y$.Setze $E = L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\Omega = \{(\omega_a)_{a\in A} : \omega_a \in \{0;1\}\}$,zugehöriger Produkt-$\sigma$-Algebra $\Sigma$ und dem Produktmaß $\mu$ mit $\mu(\{\omega_a = 0\}) = \mu(\{\omega_a = 1\}) = 1/2$ wie in 1.2.6. Sei $\varphi_a \in E'$ mit

$$\langle \varphi_a, f \rangle = \int_{\{\omega_a = 0\}} f\ d\mu - \int_{\{\omega_a = 1\}} f\ d\mu.$$

Für $f \in E$ ist $\langle \varphi_a, f \rangle$ nur für abzählbar viele $a$ ungleich Null. Sei $T \in F$ mit

$$Tf = \sum_{a \in A} \langle \varphi_a, f \rangle a.$$

Da $A$ disjunkt ist, ist die Summe gleich $\sup_{a\in A}\{\langle \varphi_a, f \rangle a\}$,und dies existiert,da $F$ $\sigma$-Dedekindvollständig ist und die $\langle \varphi_a, f \rangle a$ nur abzählbar oft ungleich 0.
Ist $S : E \to F$ mit $S \geq T, 0$ ,so ist für $f_a = \mathbf{1}_{\{\omega_a = 0\}}$ $S\mathbf{1} \geq Tf_a \geq Sf_a = a/2$, also $2S\mathbf{1}$ obere Schranke von $A$. Betrachte umgekehrt $S : E \to F$ mit

$$Sf = 1/2 \left( Tf + \int_\Omega f\ d\mu \cdot y \right).$$

Dann ist analog zu I. $S \geq T, 0$ und $2S\mathbf{1} = y$.
Es folgt,dass $T^+$ existiert und $y \geq 2T^+\mathbf{1} \geq a$ für $a \in A$ ,also $2T^+\mathbf{1} = \sup(A)$.
Mit 3.4 folgt die Dedekindvollständigkeit von $F$. ○

**3.5 Korollar** (i) *Sei $F$ ein Vektorverband.Ist für jeden separablen normierten Vektorverband $E$ $L^r(E,F)$ ein Vektorverband,so ist $F$ $\sigma$-Dedekindvollständig.*
(ii) *Sei $F$ ein Banachverband.Ist für jeden separablen Banachverband $E$ $\mathcal{L}^r(E,F)$ ein Vektorverband,so ist $F$ $\sigma$-Dedekindvollständig.*

*Beweis:* (i) Ist $A$ im Beweis von 3.2 abzählbar,so sind im selben Beweis alle $\ell_M$ mit der Supremumnorm isomorph zu Unterräumen von $c$ und damit separabel.Es folgt,dass $A$ ein Supremum besitzt.
(ii) Da $L^1(0,1)$ separabel ist, wurde die Behauptung schon bewiesen beim Beweis von 3.3,Schritt I. ○

*Bemerkung:* 3.5(ii) wird auch (anders) bewiesen in [7].

Wir notieren noch:

**3.6 Korollar** *Sei $F$ ein Banachverband.Dann sind äquivalent:*
(i) *$\mathcal{L}(E,F)$ ist für jeden Banachverband $E$ ein Vektorverband*
(ii) *$F$ ist ein Dedekindvollständiger M-Raum mit Ordnungseins.*
*Beweis:*(ii)$\Rightarrow$(i) folgt aus den Sätzen 0.1 und 1.1.3. (i)$\Rightarrow$(ii): Hat $F$ Eigenschaft (i), so ist $F$ nach Satz 3.3 Dedekindvollständig.Zudem muss $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ für jeden Banachverband $E$ gelten. Nach Satz 1.1.10 muss $F$ dann isomorph zu einem M-Raum sein,und nach einer Bemerkung im Anschluss an 1.3.3 muss dieser M-Raum eine Ordnungseins $e$ besitzen. Damit besitzt $F$ selbst eine Ordnungseins (nämlich das isomorphe Bild von $e$) . ○

Zu 3.6 gilt auch eine analoge Aussage bezüglich separabler Banachverbände $E$ und $\sigma$-Dedekindvollständiger M-Räume $F$.

Ist $E$ ein bestimmter Vektorverband, so kann $L^r(E,F)$ ein Vektorverband sein,ohne dass $F$ Dedekindvollständig ist. Es gilt sogar

**3.7 Beispiel** *Es gibt einen Vektorverband $F$,so dass $L^b(E,F)$ für jeden uniform vollständigen Vektorverband $E$ ein Vektorverband ist, und $F$ ist nicht Dedekindvollständig.*
*Beweis:* Sei $F = \ell_0^\infty$ (vgl. 2.1.3 ff.).In 2.1.4 wurde gezeigt, dass für einen uniform vollständigen Vektorverband $E$ und $T \in L^b(E,F), x \in E_+$ stets

$\sup T[0,x]$ existiert. Dann existiert auch $|T|$,und $L^b(E,F) = L^r(E,F)$ ist ein Vektorverband. Beachte,dass $F$ nicht $\sigma$-Dedekindvollständig ist. ○

Dieses Beispiel stammt wie 2.1.3ff. aus [4]. Es zeigt auch,dass man die Aussagen aus 3.2 und 3.3 nicht vermischen darf.

**3.8 Beispiel** *Sei $E$ ein Vektorverband, und jedes Hauptideal in $E$ sei endlichdimensional.Dann ist $L^b(E,F) = L^r(E,F)$ ein Vektorverband für jeden Vektorverband $F$.*

*Beweis:* Liegt für $x \geq 0$ $[0,x]$ in einem endlichdimensionalen Unterverband von $E$, so existiert $\sup T[0,x]$ sogar für jeden linearen Operator $T : E \to F$ (vgl. 0.3). Die Behauptung folgt wie oben. ○

3.8 ist natürlich ein sehr einfaches Beispiel.Räume mit dieser Eigenschaft sind neben $\mathbb{R}^n$ die Räume $\ell_0$ und $\ell_0(I)$ für eine beliebige Indexmenge $I$.
Van Rooij hat in [12] gezeigt, dass diese Eigenschaft auch notwendig ist,damit $L^r(E,F)$ für jedes $F$ einen Vektorverband bildet. Dieser Beweis kann hier aber nicht präsentiert werden, da er sehr tiefliegende Methoden benutzt.

Als Beispiel für Banachverbände kann der Raum $\ell^1$ dienen.In 1.2.7. wurde schon gezeigt,dass für jeden Banachverband $F$ $\mathcal{L}^r(\ell^1,F)$ einen Vektorverband bildet.

Abschließend einige Bemerkungen:
(1) Es sind keine Vektorverbände $E,F$ bekannt mit $L^b(E,F) \neq L^r(E,F)$, für die $L^r(E,F)$ ein Vektorverband ist.
Es ist eine offene Frage,ob es welche gibt.

(2) In allen bekannten Fällen,in denen für $T \in L^r(E,F)$ $|T|$ existiert, ist $|T|$ durch die Riesz-Kantorovich-Formel $|T|x = \sup T[-x,x]$ für $x \geq 0$ gegeben.Es wäre aber auch denkbar,dass $|T|$ existiert,obwohl $T[-x,x]$ nicht immer ein Supremum besitzt. Auch dies ist noch ein offenes Problem.

(3) Ist $L^r(E,F)$ kein Vektorverband, so könnte man auf die Idee kommen, den "Raum" aller Operatorn $T \in L^r(E,F)$ zu betrachten, für die $|T|$ existiert. Dieser "Raum" ist aber nicht besonders interessant, da er i.a. keine vernünftige Struktur besitzt , d.h. weder ein Vektorraum noch ein Verband ist. Siehe z.B.[4].

# 4 Andere Regularitätsbedingungen

## 4.1 Kompakte Operatoren

Über kompakte Operatoren auf Banachverbänden gibt es zahlreiche Sätze;z.B. Antworten auf die Frage, ob für $0 \le S \le T$ und $T$ kompakt auch $S$ kompakt sein muss.(Es ist vielleicht etwas überraschend,dass dies nicht immer der Fall ist)
Hier werden einige Zusammenhänge zwischen Kompaktheit und den Ordnungseigenschaften aus den vorigen Kapiteln dargestellt. $E, F$ seien Banachverbände, $\mathcal{K}(E, F)$ sei der Vektorraum aller kompakten Operatoren von $E$ nach $F$. $\mathcal{K}(E, F)$ ist mit der Operatornorm stets ein Banachraum.
Zunächst ein klassisches Ergebnis, welches man (z.B.) bei Meyer-Nieberg[1],Satz 3.7.22, findet:

**4.1.1 Satz (Krengel)** *Ist $F$ ein M-Raum, so ist $\mathcal{K}(E, F)$ ein Vektorverband.*
*Insbesondere sind also alle kompakten Operatoren regulär.*

*Beweis:* Sei $T : E \to F$ kompakt. Dann ist für $x \in E^+$ $T[-x, x]$ relativ kompakt (=präkompakt),nach 1.1.10 exitiert somit $\sup T[-x, x]$. Damit existiert $|T|$ und ist durch die Riesz-Kantorovich-Formel gegeben.
Zeige nun noch, dass $|T|$ kompakt ist: Sei

$$D = \{\sup T[-x, x] : x \in \text{ball}(E)_+\}.$$

$D$ lässt sich als Teilmenge von $F''$ und daher als Teilmenge eines Raumes $C(X)$ auffassen, ebenso $T\text{ball}(E)$.
$T\text{ball}(E)_+$ ist relativ kompakt, daher existiert nach dem Satz von Arzela-Ascoli zu $t \in X, \varepsilon > 0$ eine Umgebung $U$ von $t$ mit $|Tx(t) - Tx(s)| < \varepsilon$ für alle $s \in U, x \in \text{ball}(E)$.
Dann folgt aber für $y = \sup T[-x, x] \quad |y(t) - y(s)| \le \varepsilon$ für $s \in U$.
Da $|T|$ stetig, ist $D$ auch normbeschränkt, also ist (wieder nach Arzela-Ascoli) $\bar{D}$ kompakt. Wegen $|T|\text{ball}(E) \subset \bar{D} - \bar{D}$ folgt, dass $|T|$ kompakt ist. ◯

*Bemerkung:*Analog zu 1.1.1 lässt sich noch zeigen, dass im Fall von 4.1.1 $\mathcal{K}(E, F)$ mit der r-Norm zu einem Banachverband wird.

In anderen Fällen sind die Zusammenhänge zwischen Kompaktheit und Ordnungseigenschaften allerdings weitaus schwächer. So gibt es noch z.B. ein duales Ergebnis für L-Räume $E$, nach dem mit einigen Zusatzeigenschaften von $E$ und $F$ $\mathcal{K}(E, F)$ ein Banachverband ist. Dies ist aber in unserem Zusammenhang weniger interessant, da diese Eigenschaften schon die Regularität aller stetigen Operatoren implizieren. Allgemein sind kompakte Operatoren nicht einmal ordnungsbeschränkt. Siehe 2.3.1.
Man beachte auch,dass wir mit 1.1.13 schon eine teilweise Umkehrung von 4.1.1 bewiesen haben.

Auch im Zusammenhang mit Fragen der Kapitel 2 und 3 existieren Gegenbeispiele. Das erste stammt von Wickstead[14], das zweite von Abramovich und Wickstead[8].

**4.1.2 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$ und einen kompakten ordnungsbeschränkten Operator $T : E \to F$, der nicht regulär ist.*

*Beweis:* Die Konstruktion erfolgt in mehreren Schritten:
I.Sei $E = L^2(0, 1)$ , $n \in \mathbb{N}$. Konstruiere einen regulären Operator $S_n : E \to E$ mit

$$\|S_n\| \leq 2^{-n/2} \text{ und } |S_n|f = \int_0^1 f(t)\, dt \cdot \mathbf{1}.$$

Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $r_k$ die $k$-te Rademacherfunktion und $e_k = \mathbf{1}_{[(k-1)/2^n, k/2^n]}$.
Setze $S_n f = \sum_{k=1}^{2^n} \langle f, e_k \rangle r_k$. Wegen $\dim R(S) < \infty$ ist $S_n$ regulär und kompakt, und es ist

$$\|S_n f\|^2 = \sum_{k=1}^{2^n} \|\langle f, e_k\rangle r_k\|^2 = \sum_{k=1}^{2^n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{2^n} |\langle 2^{-n/2} f, 2^{n/2} e_k\rangle|^2 \leq \|2^{-n/2} f\|^2$$

also $\|S_n\| \leq 2^{-n/2}$.
Für $f \geq 0$ ist $\pm S_n f \leq \int_0^1 f(t)\, dt \cdot \mathbf{1}$;
andererseits ist $|S_n|f \geq \sup_{t\in[0,1]} S_n g_t$ mit $g_t = f \cdot \sum_{k=1}^{2^n} r_k(t) e_k$ und

$$S_n g_t(t) = \sum_{k,l=1}^{2^n} \langle f \cdot e_k, e_l\rangle r_k(t) \cdot r_k(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \langle f \cdot e_k, e_k\rangle \cdot 1 = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Also $|S_n|f = \int_0^1 f(t)\,dt \cdot \mathbf{1}$.
II.Setze

$$T : c[E] \to c[E] \text{ mit } Tx = (S_n x_n)_{n=1}^\infty.$$

Wegen $\|S_n\| \leq 2^{-n/2}$ existiert $T$, ist $\|T\| \leq 2^{-1/2}$,und $T$ ist kompakt als Limes kompakter Operatoren. Ausserdem liegt $R(T)$ in $c_0[E]$.
$T$ ist ordnungsbeschränkt: Für $x \in (c[E])_+$ liegt

$$y := (|S_n|x_n)_{n=1}^\infty = \left(\int_0^1 x_n(t)\,dt \cdot \mathbf{1}\right)_{n=1}^\infty$$

in $c[E]$ , da $(x_n)$ in der $L^2$-Norm konvergiert. Es ist klar, dass $T[-x,x]$ in $[-y,y]$ liegt. Ist $\|x\| \leq 1$, so ist ebenfalls $\|y\| \leq 1$.
Für eine obere Schranke $U$ von $\pm T$ gilt

$$(Ux)_n \geq |S_n|x_n = \int_0^1 x_n(t)\,dt \cdot \mathbf{1},$$

also $U\mathbf{1} \geq \mathbf{1}$.
III.Sei $I : (c[E])^n \to \ell^\infty[E]$ die Umordnung
$(I(x^{(1)},\dots,x^{(n)}))_{kn+m} = x_{k+1}^{(m+1)}$ für $k \geq 0, 0 \leq m \leq n-1$
und $Q_n := IT$.
Da $R(T) \subset c_0[E]$, liegt auch $R(Q_n)$ in $c_0[E]$.
$Q_n$ ist kompakt, da $T$ kompakt ist, und $Q_n$ ist ordnungsbeschränkt:
Sei $0 \leq x = (x^{(1)},\dots,x^{(n)})$ und

$$y^{(j)} \in c[E],\ \|y^{(j)}\| \leq \|x^{(j)}\| \text{ mit } T[-x^{(j)},x^{(j)}] \subset [-y^{(j)},y^{(j)}].$$

Setze nun $z = z^{(1)} \vee \dots \vee z^{(n)}$ mit $z_{kn+j-1}^{(j)} = y_{k+1}^{(j)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und
$z_m^{(j)} = \lim(y^{(j)})$ für $m \neq kn+j-1$.
Dann ist $z \in c[E]$; $Q_n[-x,x] \subset [-z,z]$.
Ausserdem ist

$$\|z\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|z_m^{(1)} \vee \dots \vee z_m^{(n)}\|_2 \leq n^{1/2} \cdot \sup_{m,j\in\mathbb{N}} \|z_m^{(j)}\|_2 \leq n^{1/2} \cdot \|x\|.$$

IV. Betrachte schließlich den Raum $F := \ell^\infty[(c[E])^{n^3}]_{n=1}^\infty$
und einen Operator $V : F \to \ell^\infty[c[E]]$ mit

$$Vx = \left(\frac{1}{n^2} Q_{n^3} x_n\right)_{n=1}^\infty.$$

Wegen $\|Q_{n^3}\| \leq 2^{-1/2}$ ist $V$ immer noch kompakt und auch ordnungsbeschränkt: Zu $x \in F$ existiert $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$z_n \in c[E] \text{ und } \|z_n\| \leq \frac{n^{3/2}}{n^2}\|x_n\| \leq \|x\|,$$

also $z \in \ell^\infty[c[E]]^{n^3}$, so dass

$$n^{-2}Q_{n^3}[-x_n, x_n] \subset [-z_n, z_n]$$

und damit $V[-x, x] \subset [-z, z]$.
$V$ ist aber nicht regulär.
Nehme an, $V$ sei regulär und $U \geq \pm V$.
Ist dann $U_n$ die Einschränkung von $U$ auf die $n$-te Komponente von $F$, so ist $U_n \geq \pm Q_{n^3}/n^2$. Sei wiederum $U_n^{(j)}$ die Einschränkung von $U_n$ auf die $j$-te Komponente von $(c[E])^{n^3}$,so ist

$$U_n\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{n^3} U_n^{(j)}\mathbf{1}_{(c[E])}.$$

Ist nun noch $P_n^{(j)} : c[E] \to c[E]$ mit

$$(P_n^{(j)}x)_k = x_{(k-1)n^3+j-1},$$

so ist $P_n^{(j)}U_n^{(j)} \geq n^{-2}T$ und damit $P_n^{(j)}U_n^{(j)}\mathbf{1} \geq n^{-2}\mathbf{1}$. Es folgt $U_n^{(j)}\mathbf{1} \geq n^{-2}\mathbf{1}$ unendlich oft und daher $\lim(U_n^{(j)}\mathbf{1}) \geq n^{-2}\mathbf{1}$.
Das ergibt aber $\lim(U_n\mathbf{1}) \geq n$ und damit $\|U_n\| \geq n$.
Wegen $\|U\| \geq \|U_n\|$ folgt $\|U\| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch. ○

**4.1.3 Beispiel** *Es gibt Banachverbände $E, F$ und einen kompakten Operator $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ ,der keinen Betrag besitzt.*
*Beweis:* Definiere einen Operator $T : c_0 \to c[L^2(0,1)]$ mit

$$(Tx)_n = 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} x_{k+2^n-2}\, r_k$$

für $n$ ungerade und $(Tx)_n = 0$ für $n$ gerade. ($r_k$ sei wieder die $k$-te Rademacherfunktion).
Es ist

$$\|(Tx)_n\|^2 \leq 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} |x_{k+2^n-2}|^2 \leq 1/2^n\|x\|^2,$$

also liegt $T(c_0)$ in $c_0[L^2(0,1)]$, und $T$ ist kompakt (vgl.4.1.2).
Setze nun $S : c \to c[L^2(0,1)]$ mit $Sx = T(x - \lim(x)\mathbf{1})$.
Zeige,dass $S$ die gewünschten Eigenschaften hat:
$S$ ist kompakt, da $S\mathrm{ball}(c) \subset 2T\mathrm{ball}(c_0)$ relativ kompakt ist.
Sei nun

$$U : c \to c[L^2(0,1)] \text{ mit } (Ux)_n = 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} x_{k+2^n-2} \cdot \mathbf{1}.$$

Für $x \in c_0$ ist

$$\|(Ux)_n\| \leq 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} \|x_{k+2^n-2}\| \leq \max_{1\leq k\leq 2^n} \|x_{k+2^n-2}\| \to 0$$

für $n \to \infty$. $U$ ist somit punktweiser Limes der Operatoren $U_m$ mit $(U_m x)_n = (Ux)_n$ für $m \leq n$ und $(U_m x)_n = 0$ für $m > n$ , nach dem Satz von Banach-Steinhaus also stetiger Operator nach $c[L^2(0,1)]$.
Sei schließlich $V : c \to c[L^2(0,1)]$ mit

$$Vx = U(x - \lim(x)\mathbf{1}) + 2\lim(x) \cdot \mathbf{1}.$$

Es ist nun $V \geq T, 0$:
Sei $x \geq 0$, $x = c\mathbf{1} + y$; $c \geq 0$, $y \in c_0, y_n \geq -c \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Es folgt $Vx = 2c\mathbf{1} + Uy$ ,also

$$(Vx)_n = 2c\mathbf{1} + 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} y_{k+2^n-2}\mathbf{1} \geq 2c\mathbf{1} + 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} -c\mathbf{1} \geq 0$$

und $(V - T)x = 2c\mathbf{1} + Uy - Ty$
Es folgt $((V - T)x)_n = (Vx)_n \geq 0$ für $n$ gerade und

$$((V-T)x)_n = 2c\mathbf{1} + 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} y_{k+2^n-2}(\mathbf{1} - r_n) \geq 2c\mathbf{1} + 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} -2c \cdot \mathbf{1} \geq 0$$

für $n$ ungerade.
$T$ ist also regulär.
$T$ kann aber keinen Betrag besitzen.
Denn für $|T|$ wäre $(|T|x)_n = 0$ für alle geraden $n$ (vgl. 3.1).
Andererseits sei $A = \{x \in c\ : x_n \in \{-1, 1\}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$,so ist für ungerades $n$ $(|T|\mathbf{1})_n \geq (Tx)_n\ \forall x \in A$, aber für $t \in [0,1]$ existiert stets $x \in a$ mit

$$(Tx)_n = 1/2^n \sum_{k=1}^{2^n} x_{k+2^n-2} \cdot r_k(t) = 1,$$

es folgt $(|T|\mathbf{1})_n \geq \mathbf{1}$ für ungerades $n$.
Damit kann $|T|\mathbf{1}$ nicht in $c[L^2(0,1)]$ liegen,also $|T|$ nicht existieren. ○

*Bemerkung:*Ein alternatives Gegenbeispiel findet man in [6]. Hier wird ein Operator $T$ konstruiert mit $S \geq T, 0$ für einen *kompakten* Operator $S$, aber $T$ besitzt trotzdem keinen Betrag.

## 4.2 Disjunkterhaltende Operatoren

Ein linearer Operator $T : E \to F$ heisst *disjunkterhaltend* ,wenn aus $x \perp y$ stets $Tx \perp Ty$ folgt.
Hier werden zwei Sätze vorgestellt,die zeigen,dass unter nur geringen Voraussetzungen ein disjunkterhaltender Operator $T : E \to F$ stets regulär ist und überdies $|T|$ existiert (und eine sehr einfache Form hat).

Das erste Ergebnis ist ursprünglich von Abramovich. Der hier vorgestellte Beweis stammt von de Pagter und findet sich bei Meyer-Nieberg[1],3.1.5.

**4.2.1 Satz** *Seien $E, F$ normierte Vektorverbände.*
*Dann ist jeder disjunkterhaltende Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ regulär und $|T|$ existiert.*

Der *Beweis* ist zwar elementar, aber etwas länglich.Die Idee ist folgende: Zeige,dass zu $0 \leq u \leq e$ und $n \in \mathbb{N}$ $v$ und $w$ existieren,so dass
(i) $|u-v| \leq \frac{1}{n}e$, (ii) $|u-w| \leq \frac{1}{n}e$ und (iii) $(|Tv| \wedge |Tw| - |Te|)^+ \perp |Tu|$.
Dann folgt nämlich

$$
\begin{aligned}
&(|Tu| - |Te|)^+ = (|Tu| - |Te|)^+ \wedge (|Tu| - |Te|)^+ \wedge |Tu| \\
&\leq (|T(u-v)| + (|Tv| - |Te|)^+) \wedge (|T(u-w)| + (|Tw| - |Te|)^+) \wedge |Tu| \\
&\leq (|T(u-v)| + |T(u-w)| + (|Tv| \wedge |Tw| - |Te|)^+ \wedge |Tu| \\
&= |T(u-v)| + |T(u-w)|
\end{aligned}
$$

und damit $\|(|Tu| - |Te|)^+\| \leq \frac{2}{n}\|T\|\|e\|$.
Da $n$ beliebig war,folgt $(|Tu| - |Te|)^+ = 0$ und damit $|Te| \geq |Tu|$.
Daraus ergibt sich aber die Existenz von $\sup T[-e,e] = \sup |T[0,e]| = |Te|$ und damit von $|T|$,und es gilt $|T|e = |Te|$ für alle $e \geq 0$.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ fest.
Sei $y_k = (4nu - (2k-1)e)^+ \wedge e$ für $1 \leq k \leq 2n$,
$v = 1/n \sum_{k+1}^{n} y_{2k}, \qquad w = 1/n \sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}$
*Behauptung:* $v$ und $w$ haben die gewünschten Eigenschaften.

(i),(ii):Für $1 \leq k \leq n$ ist

$$nu \wedge ke = (nu - (k-1)e) \wedge e + (k-1)e$$

$$= nu \wedge (k-1)e - nu \wedge (k-1)e + (nu - (k-1)e) \wedge e + (k-1)e$$

$$= nu \wedge (k-1)e + (nu - (k-1)e) \wedge e + (nu - (k-1)e)^-$$

$$= nu \wedge (k-1)e + (nu - (k-1)e) \wedge e + ((nu - (k-1)e) \wedge e)^-$$

$$= (nu - (k-1)e)^+ \wedge e + nu \wedge (k-1)e$$

Es folgt $\sum_{k=1}^{n}(nu - (k-1)e)^+ \wedge e = \sum_{k=1}^{n}(nu \wedge ke) - (nu \wedge (k-1)e) = nu \wedge ne - nu \wedge 0 = nu$.

Setze nun $z_k = y_{2k} - (nu - (k-1)e)^+ \wedge e$.Dann ist $0 \leq y_{2k} - z_k \leq e$ und $y_{2k} \leq e$,es folgt $|z_k| \leq e$. Benutzt man die obigen Formeln,ergibt sich $\sum_{k=1}^{n} z_k = nv - nu$ und somit $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \geq |nv - nu|$.
Sind nun die $z_k$ disjunkt,so folgt $|nv - nu| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |z_k| \leq e$ und damit (i).

Für $1 \leq k < j \leq n$ gilt

$$|z_k| \wedge |z_j| \leq |(4nu - (4k-1)e)^+ \wedge e - (nu - (k-1)e)^+ \wedge e| \wedge y_{2j}$$

$$(1) \leq ((e - (4nu - (4k-1)e)^+)^+ \vee (e - (nu + (k-1)e)^+)^+) \wedge y_{2j}$$

$$(2) \leq (((e - 4nu + (4k-1)e^+) \wedge e) \vee ((e - nu + (k-1)e)^+ \wedge e)) \wedge (4nu - (4j-1)e)^+$$

$$\leq ((4ke - 4nu)^+ \vee (ke - nu)^+) \wedge (4nu - 4ke)^+ = 0$$

Die Ungleichung (1) ergibt sich wegen $x \wedge e - z \wedge e \leq e - z \wedge e = (e-z)^+$ und daher $|x \wedge e - z \wedge e| \leq (e-z)^+ \vee (e-x)^+$; (2) folgt aus $(e - x^+)^+ = (e + (-x \wedge 0))^+ = (e - x \wedge e)^+ = (e - x^+) \wedge e$ für alle $x, z \in E$.

Wählt man statt dessen $z_k = y_{2k-1} - (nu - (k-1)e)^+ \wedge e$, so ist
$\sum_{k=1}^n z_k = nw - nu$, $|z_k| \leq e$ wie oben,und diese $z_k$ sind ebenfalls disjunkt:
Für $1 \leq k, j \leq n$ ist

$$|z_k| \wedge |z_j| \leq |(4nu - (4k-3)e)^+ \wedge e - (nu - (k-1)e)^+ \wedge e| \wedge y_{2j-1}$$

$$\leq (((4k-2)e - 4nu)^+ \vee (ke - nu)^+) \wedge (4nu - (4j-3)e)^+$$

analog zu oben,aber dies ist $\leq (4ke - 4nu)^+ \wedge (4nu - 4ke)^+ = 0$.
Es gilt also auch (ii).
(iii) Wir benötigen zunächst eine Zerlegung von $u$: Sei für $1 \leq k \leq 2n$

$$x_k = (4nu - 2(k-1)e)^+ \wedge u - (4nu - 2ke)^+ \wedge u.$$

Dann ist
$\sum_{k=1}^{2n} x_k = (4nu - 0e)^+ \wedge u - (4nu - 4ne)^+ \wedge u = u$
Zeige zunächst: a) $(nv - (k-1)e) \perp x_{2k-1}$ und b) $(nw - ke) \perp x_{2k}$ für $1 \leq k \leq n$.
Sei $1 \leq k < j \leq n$.
Es gilt $0 \leq e - y_j$

$$= e - (4nu - (2j-1)e)^+ \wedge e$$

$$= (e - (4nu - (2j-1)e)^+)^+ = (2je - 4nu)^+ \wedge e \leq (2je - 4nu)^+$$

und daher

$$(e - y_j) \wedge (4nu - 2(k-1)e)^+ \leq (2je - 4nu)^+ \wedge (4nu - 2je)^+ = 0,$$

es folgt $(e - y_j) \perp x_k$.
Weiter gilt

$$x_k \leq u - (4nu - 2ke)^+ \wedge u$$

$$= (u - (4nu - 2ke)^+)^+ = (2ke - (4n-1)u)^+ \wedge u$$

$$\leq ((2k-1)e - 4nu)^+ \wedge u \leq ((2i-1)e - 4nu)^+ \wedge u$$

und damit $x_k \perp y_i$.
Wegen

$$nv - (k-1)e = \sum_{j=1}^{k-1} (y_{2j} - e) + \sum_{j=k}^{n} y_{2j}$$

und

$$nw - ke = \sum_{j=1}^{k}(y_{2j-1} - e) + \sum_{j=k+1}^{n} y_{2j-1}$$

folgt

$$nv - (k-1)e \perp x_{2k-1} \text{ und } nw - ke \perp x_{2k}.$$

Wegen

$$(|Tv| - |Te|)^+ \leq (|Tv| - |T((k/n)e)|) \leq |T(v - ((k-1)/n)e)|$$

und

$$(|Tw| - |Te|)^+ \leq |T(w - (k/n)e)|$$

folgt

$$(|Tv| - |Te|)^+ \wedge (|Tw| - |Te|)^+ \perp Tx_k$$

für alle $1 \leq k \leq n$, da $T$ disjunkterhaltend ist.
Es folgt $(|Tv| \wedge |Tw| - |Te|)^+ \perp |Tu|$ ,was zu zeigen war. ○

Ähnlich zeigt man im unnormierten Fall

**4.2.2 Korollar** *Seien $E, F$ Vektorverbände und $T \in L^b(E, F)$ disjunkterhaltend.*
*Dann existiert $|T|$, und es gilt $|T|x = |Tx|$ für $x \geq 0$.*
*Beweis:* Seien zu $0 \leq u \leq e \in E$ $v, w \in E$ wie im Beweis von 4.1.1. Sei $y \in F$ mit $T[-e, e] \subset [-y, y]$. Wie oben ist

$$(|Tu| - |Te|)^+ \leq |T(u - v)| + |T(u - w)| \subset 2/n[-y, y]$$

für alle $n \in \mathbf{N}$ ,also $|Tu| \leq |Te|$. Die Aussage folgt wie oben. ○

Zum Schluss noch ein kleines Gegenbeispiel:
Sei $E$ der Raum der stückweise differenzierbaren stetigen Funktionen (endlich viele Knickstellen) auf $[0, 1)$ , $F$ der Raum aller reellwertigen Funktionen auf $[0, 1)$. $E$ und $F$ sind in natürlicher Weise Vektorverbände. Der Operator $T : E \to F$, der $f$ die rechtsseitige Ableitungsfunktion von $f$ zuordnet,ist linear und nicht ordnungsbeschränkt,kann also nicht regulär sein. $T$ ist aber disjunkterhaltend: Ist $f_1 \perp f_2$, so ist für alle $x \in [0, 1)$ $f_i[x, x + \varepsilon) = \{0\}$ für ein $\varepsilon > 0$ und ein $i \in \{1, 2\}$.Es folgt $Tf_i(x) = 0$ und damit $Tf_1 \perp Tf_2$.

## 4.3 Kegelabsolutsummierende und majorisierende Operatoren

In diesem Abschnitt werden Operatoren vorgestellt,die sich in gewisser Weise so verhalten wie Operatoren von einem L-Raum oder Operatoren in einen M-Raum.Wie wir sehen werden, folgt dann die Regularität unter den gleichen Bedungungen wie für L-Räume bzw. M-Räume.
Der Abschnitt behandelt einen Spezialfall aus Meyer-Nieberg[1],2.8.
$E$ und $F$ seien Banachverbände.

**4.3.1 Definition** (i) *Für* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *sei*
$\sigma(T) = \sup\{\|Tx_1\| + \cdots + \|Tx_n\| : n \in \mathbb{N}, x_i \in E, |x_1| + \cdots + |x_n| \in \mathrm{ball}(E)\}$.
$T$ *heißt* kegelabsolutsummierend,*wenn* $\sigma(T) < \infty$.
(ii) *Für* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *sei*
$\sigma^*(T) = \sup\{\||Tx_1| \vee \cdots \vee |Tx_n|\| : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathrm{ball}(E)\}$.
$T$ *heißt* majorisierend,*wenn* $\sigma^*(T) < \infty$. ○

Aus der Definition sieht man sofort,dass alle Operatoren aus $\mathcal{L}(E, F)$ kegelabsolutsummierend sind,wenn $E$ ein L-Raum ist und majorisierend,wenn $F$ ein M-Raum ist.
Das bedeutet natürlich auch, dass nicht alle kegelabsolutsummierenden oder majorisierenden Operatoren regulär sind. Ein Gegenbeispiel ist der Operator aus 1.2.1(für beide Fälle).

Ziel des Abschnitts ist der Satz

**4.3.2 Satz** *Sei $F$ monoton vollständig. Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ kegelabsolutsummierend oder majorisierend, so ist $T$ regulär und $|T|$ existiert.*

Man beachte hier die Parallelen zu L- und M-Räumen.Ist $E$ ein L-Raum und $F$ monoton vollständig,so ist $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$; ist $F$ ein monoton vollständiger M-Raum, so besizt $F$ eine Ordnungseins und ist Dedekind-volständig,und es ist ebenfalls $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}^r(E, F)$.

Der Beweis von 4.3.2 benötigt noch zwei weitere Ergebnisse:

**4.3.3 Satz** *Sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$ majorisierend. Dann ist $T'$ kegelabsolutsummierend.*
*Beweis:* Sei $n \in \mathbb{N}$, $x' \in \mathrm{ball}(F')$; $x'_1, \ldots, x'_n$ mit $\sum_{i=1}^n |x'_i| \leq |x'|$.
Dann ist

$$\sum_{i=1}^n \|T'x'_i\|$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\langle T'x'_i, x_i\rangle| : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\langle x'_i, Tx_i\rangle| : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{i=1}^n \langle |x'_i|, |Tx_i|\rangle| : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\left\langle \sum_{i=1}^n |x'_i|, |Tx_1| \vee \cdots \vee |Tx_n|\right\rangle : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\langle |x'|, |Tx_1| \vee \cdots \vee |Tx_n|\rangle : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\| |Tx_1| \vee \cdots \vee |Tx_n| \| : x_i \in \mathrm{ball}(E)\right\}$$

$\leq \sigma^*(T)$.
Es folgt $\sigma(T') \leq \sigma^*(T)$ und damit die Behauptung. ○

*Bemerkung:* Es lässt sich auch $\sigma^*(T) = \sigma(T')$ und damit die Umkehrung von 4.3.3 zeigen und auch die duale Aussage $\sigma(T') = \sigma^*(T)$. Diese Ergebnisse werden hier aber nicht benötigt.

**4.3.4 Satz** *Sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*
(i) *Ist $T$ kegelabsolutsummierend,so existiert ein L-Raum $G$, ein Verbandshomomorphismus $Q : E \to G$ und ein stetiger linearer Operator $S : G \to F$,so dass $SQ = T$.*

(ii) *Ist $T$ majorisierend, so existiert ein M-Raum $G$, ein intervallerhaltender Verbandshomomorphismus $Q : G \to F$ und ein stetiger linearer Operator*

*$S : E \to G$, so dass $QS = T$.*

*Beweis:* (i) Sei $T$ kegelabsolutsummierend. Zu $x \in E$ setze

$$\rho(x) = \sup\left\{\|Tx_1\| + \cdots + \|Tx_n\| : n \in \mathbb{N}, x_i \in E, \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq |x|\right\}$$

Dann ist $\rho(x) \leq \sigma(T) \cdot \|x\| < \infty$, also ist insbesondere $\rho$ stetig.
Es ist klar,dass $\rho(0) = 0$ und $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
Wegen $|x| + |y| \geq |x + y|$ und der Rieszschen Zerlegungseigenschaft ist $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$. Für $x, y \geq 0$ ist $\rho(x) + \rho(y) = \rho(x + y)$.
$\rho$ ist also eine auf $E_+$ additive Seminorm, und $\rho^{-1}(0)$ ein abgeschlossenes Ideal.
Es folgt,dass auf $G_0 := E/\rho^{-1}(0)$ durch $\bar{\rho}(\bar{x}) = \inf\{\rho(x) : x \in \bar{x}\}$ eine L-Norm gegeben ist.
Wegen $\rho^{-1}(0) \subset N(T)$ ist $S : G_0 \to F$ mit $S\bar{x} = Tx$ für $x \in \bar{x}$ wohldefiniert und wegen $\bar{\rho}\bar{x} \geq Tx$ stetig mit Norm $\leq 1$. Ist $G$ die Vervollständigung von $G_0$ ,lässt sich $S$ auf $G$ fortsetzen. Wählt man noch für $Q : E \to G$ die Quotientenabbildung, so ist alles bewiesen.

(ii) Sei $T : E \to F$ majorisierend. Nach 4.3.3 ist $T'$ kegelabsolutsummierend.
Sei $\rho$ die Seminorm auf $F'$ für $T'$ wie in (i).
Setze nun $\tau(x) = \sup\{\langle x', x\rangle : x' \in F', \rho(x') \leq 1\}$
und $G = \{z \in F : \tau(z) < \infty\}$.
$G$ ist ein Ideal in $F$: Wegen $\rho(x') = \rho(|x'|)$ folgt aus der Definition von $\tau$,dass $\tau$ auf $F^+$ monoton ist. Mit der Rieszschen Zerlegungseigenschaft sieht man, dass $\tau$ eine Norm auf $G$ ist. Da alle $x'$ stetig sind, ist $G$ mit dieser Norm vollständig.
Zeige nun noch, dass $\tau$ eine M-Norm auf $G$ ist:
Seien $x, y \in G_+$ disjunkt.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert $z' \in F'_+, \rho(z') \leq 1$ mit $\langle z', x\rangle + \langle z', y\rangle \geq \tau(x + y) - \varepsilon$.
Fasst man $x, y$ als Elemente von $F''$ auf und wendet man 1.1.7 auf $y$ und $\lambda x$ mit $\langle z', y\rangle = \lambda\langle z', x\rangle$ an,so erhält man disjunkte $x', y' \in F'_+$ mit
$\langle y', y\rangle \geq \langle z', y\rangle - \varepsilon$ und $\langle \lambda x', x\rangle \geq \langle \lambda z', x\rangle - \lambda\varepsilon$, also $\langle x', x\rangle \geq \langle z', x\rangle - \varepsilon$ sowie $x', y' \leq z'$.
Da $x', y'$ disjunkt und $\rho$ additiv, folgt $\rho(x') + \rho(y') \leq 1$ und wegen

$$\rho(x')\tau(x) \geq \langle x', x\rangle \geq \langle z', x\rangle - \varepsilon$$

sowie

$$\rho(y')\tau(y) \geq \langle z', y\rangle - \varepsilon$$

ergibt sich

$$\max\{\tau(x), \tau(y)\}$$

$$\geq \rho(x')\tau(x) + (1 - \rho(x'))\tau(y) \geq \langle z', x\rangle + \langle z', y\rangle - 2\varepsilon \geq \tau(x+y) - 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon$ beliebig war, folgt mit 1.1.8, dass $\tau$ eine M-Norm ist.
Schließlich ist wegen

$$\rho(x') \geq \|T'x'\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle x', Ty\rangle|$$

$\tau(Ty) \leq \|y\|$ für alle $y \in E$ und damit $T(E) \subset (G)$.
Setzt man für $Q : G \to F$ die natürliche Einbettung und $S : E \to G$ mit $Sx = Tx$, so ist die Behauptung bewiesen. ○

*Beweis von 4.3.2:*
(i) Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ kegelabsolutsummierend und $G$ sowie $Q, S$ aus 4.3.4.(i).
Nach 1.2.6 existiert $|S|$,und da $Q$ positiv ist,ist $|S|Q$ obere Schranke von $\pm T$.
$T$ ist somit regulär; nach 0.1 existiert $|T|$.

(ii) Sei $T$ majorisierend,und $G$ sowie $Q, S$ aus 4.3.4(ii).
Betrachte $Q\text{ball}(G)$.Da $Q(x) \vee Q(y) = Q(x \vee y)$ und $G$ ein M-Raum ist,folgt $Q(x) \vee Q(y) \in Q\text{ball}(G)$ für $x, y \in Q\text{ball}(G)$. Da $Q$ auch stetig ist,existiert $z = \sup(Q\text{ball}(G))$. Dann ist für $x \geq 0$
$T[-x, x] \subset \|T\|\|x\| \cdot [-z, z]$,also ist $T$ ordnungsbeschränkt.
Nach 0.1 existiert $|T|$. ○

# Literaturverzeichnis


[**1**] Meyer-Nieberg,P.:Banach Lattices, Springer-Verlag 1991

[**2**] Aliprantis,C.D.,Burkinshaw,O.:Positive Operators, Academic Press 1985

[**3**] Abramovich,Yu.A.:Spaces of Operators acting from one Banach space to another, J.Sovj.Math.34(1986),2134-2137

[**4**] Abramovich,Yu.A.,Wickstead,A.W.:Regular operators from and into a small Riesz space, Indag.Math.2(1991),257-274

[**5**] Abramovich,Yu.A.,Wickstead,A.W.:When each continuous operator is regular,II, Indag.Math.8(1997),281-294

[**6**] Abramovich,Yu.A.,Wickstead,A.W.:Solutions of several problems in the theory of compact operators,Proc.Am.Math.Soc.123(1995),3021-3025

[**7**] Abramovich,Yu.A.,Wickstead,A.W.:The regularity of order bounded operators into $C(K)$,II,
Quart.J.Math.Oxford,44(1993),257-270

[**8**] Abramovich,Yu.A.,Wickstead,A.W.:A compact regular operator without modulus, Proc.Am.Math.Soc.116(1992),721-725

[**9**] Abramovich,Yu.A.,Gejler,V.A.:On a question of Fremlin concerning order bounded and regular operators,Coll.Math.46(1982),15-17

[**10**] Cartwright,D.I.,Lotz,H.P.:Some characterizations of AM-and AL-spaces, Math.Z.142(1975),97-103

[**11**] Kaplan,S.:An example in the space of bounded operators from $C(X)$ to $C(Y)$, Proc.Am.Math.Soc.38(1973),595-597

[**12**] Van Rooij,A.C.M.:On the space of all regular operators between two Riesz spaces,Proc.Am.Math.Soc.88(1985),95-98

[**13**] Wickstead,A.W.:The regularity of order bounded operators into $C(K)$, Quart.J.Math.Oxford 41(1990),359-368

[**14**] Wickstead,A.W.:Order bounded operators may be far from regular; Functional Analysis and Economic theory,Springer 1998,108-117

[**15**] Xiong,H.Y.:On whether or not $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ for some classical Banach lattices $E$ and $F$,Indag.Math.47(1984),267-282

[**16**] Veksler,A.I.,Gejler,V.A.:Order and disjoint completeness of linear partially ordered spaces,Sibirsk.Math.J.13(1972),43-51

[**17**] Bauer,H.:Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter 1978

[**18**] Lindenstrauss,J.,Tzafiri,L.:Classical Banach spaces I,Springer-Verlag 1977

[**19**] Jänich,K.:Topologie,Springer-Verlag 1994